Τα μη στοιχειώδη μαθηματικά κατά τα την εποχή της Τουρκοκρατίας (Η περίπτωση του Νικηφόρου Θεοτόκη)

Μιχάλης Λάμπρου

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το επίπεδο της μαθηματικής εκπαίδευσης στον τόπο μας κατά την εποχή της Τουρκοκρατίας ήταν, ιδίως τους πρώτους αιώνες, χαμηλό. Παραδείγματος χάριν στην περίφημη σχολή του Γκιούμα και επί του σοφού Σουγδουρή, στις αρχές του 18ου αιώνα, ο συνδιδάσκαλος του Σουγδουρή, Αναστάσιος ιερεύς Παπαβασιλείου δίδασκε μόνον «*νύξιν τινά της Γεωμετρίας εις τους μαθητάς του με μικρόν πονημάτιον εισαγωγικόν εις τας Μαθηματικάς γνώσεις*»[1]. Έναν αιώνα αργότερα η πρόοδος ήταν μηδαμινή όπως γράφει ο Δάρβαρης, «*Δεν έχομεν ακόμη μίαν καλήν Αριθμητικήν δια την διδασκαλίαν των νέων…εις κανένα σχεδόν από τα παρ' ημίν σωζώμενα κοινά Σχολεία δεν παραδίδεται η Αριθμητική*»[2]. Ακόμα και στην πιο ένδοξη περίοδο της Αθωνιάδας Σχολής, επί Ευγενίου Βουλγάρεως, το επίπεδο των Μαθηματικών δεν ήταν ικανοποιητικό. Όταν «εγυμνασιάρχει[3] πανευκλεώς ο δεινός Ευγένειος», επισημαίνει παραπονούμενος το 1780 στην Απολογία του ο Μοισιόδακας «*…τίνα καρπόν εδρέψαμεν το τελευταίον από των ατρύτων μόχθων ημών;…μίαν έννοιαν συγκεχυμένην ή επιπόλαιον της Αριθμητικής και…γνώσιν ενός μόνο βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδου, και μήτε τούτου πλήρους*»[4]. Και αυτά όταν ο δεινός Βούλγαρις είχε αναγράψει[5] στην πύλη της Σχολής την παραλλαγή «*Γεωμέτρησων εισήτω, ου κωλύω. Τω μη θέλοντι συζυγώσω τας θύρας*», της γνωστής πλατωνικής επιγραφής.[6]

Τι πρέπει όμως να κάνουμε για την έλλειψη των Μαθηματικών, αναρωτιέται ο Βενιαμίν ο Λέσβιος, «*πρέπει άραγε να διαμείνωμεν, εις ην περ ήδη ευρισκόμεθα κατάστασιν;*». Όχι. «*Ώστε πρέπει να ανακληθῄ εις την εαυτήν πατρίδα η φιλοσοφία…Και προσκλητήρια είναι ουδέν άλλο, ή όπερ ο Ξενοκράτης ωνόμασε λαβάς[7] φιλοσοφίας: τουτέστιν τα μαθηματικά…Καθότι*

[1] Κ. Κούμα, *Ιστορία των Ανθρωπίνων πράξεων*, Βιέννη 1832, τόμος ΙΒ, σελ. 557.

[2] Δημητρίου Νικολάου του Δαρβάρεως, *Πρόχειρος Αριθμητική…*, Βιέννη 1803, σελίδες VII έως Χ.

[3] 1753 - 1758

[4] Ιωσίπου Μοισιόδακος, Απολογία, Βιέννη 1780. Επανέκδοση με επιμέλεια Άλκη Αγγέλου, εκδ. Ερμής, Αθήνα 1976, σελ. 25.

[5] Κ. Κούμα, ενθ. αναφ. σελίδα 562.

[6] «*Μηδείς αγεωμέτρητος εισήτω μου την στέγην*», όπως την σώζει ο βυζαντινός χρονογράφος Τζέτζης στις *Χιλιάδες*, viii 972-973.

[7] Στον Διογένη τον Λαέρτιο, IV, σώζεται το εξής ανέκδοτο για τον Ξενοκράτη, τον δεύτερο μετά τον Πλάτωνα διευθυντή της Ακαδημίας: Όταν ένας νέος ζήτησε να εγγραφεί στην Ακαδημία, ο

μόνο τα μαθηματικά των ανθρωπίνων μαθήσεων ή γνώσεων αντισταθμούνται με το βάρος ή έκτασιν του ονόματος επιστημών…Αφαίρεσον τα μαθηματικά από της Γης και θέλεις ιδείς τον άνθρωπον ερπύζοντα επί της Γης…»[8]

Σιγά – σιγά στην τουρκοκρατούμενη Ελλάδα άρχισε να αναγνωρίζεται η εκπαιδευτική αξία των Μαθηματικών. «*Οι γεωμετρικές επιστήμες*» γράφει ο Κούμας στο *Σύνταγμα Φιλοσοφίας*, είναι ικανές «*να ανάψωσι το φως του Λόγου, και να διερεθίσωσιν επί πλέον την έμφυτον του ανθρώπου φιλομάθειαν*»[9] και συμπληρώνεις στις *Ιστορίες* του, η Αριθμητική και η Γεωμετρία «*έκαναν τους μαθητάς…να βλέπωσιν οξύτερα και καθολικώτερα και να κρίνωσιν ασφαλέστερα*».[10] Ανάλογη είναι και η γνώμη του Μοισιόδακα, ο οποίος λέει ότι «*η κατ' εξοχήν ακρίβεια της Μαθηματικής…ρυθμίζει τον νουν αεί δια της ακραιφνότητος της αληθείας*».[11]

Μαζί όμως με την εκπαιδευτική αξία των Μαθηματικών, οι Διδάσκαλοι του Γένους αντιλήφθηκαν και την ευρύτερη αξία των (εννοείται μη στοιχειωδών) Μαθηματικών στις επιστήμες. Όπως γράφει ο Μοισιόδακας, ο οποίος προέταξε την διδασκαλία των Μαθηματικών από την Φιλοσοφία όταν ήταν διευθυντής της Αυθεντικής Ακαδημίας στο Ιάσιο, «*είναι το λοιπόν η Μαθηματική επιστήμη άκρως χρήσιμος ουχί μόνον τω απαρτισμώ του νοός, αλλά και πάση επιστήμη φυσική απλώς. Και τη αληθεία, ουδεμία επιστήμη ετέρα ούτως οξύνει, ούτως ρυθμίζει τον νουν δια της ακραιφνότητος της αλήθειας, καθώς αυτή, ήτις, η αλήθεια, συνηθίζει να φαίνεται άνευ ομίχλης, άνευ νέφους δισταγμού μόνον εν τω ορίζοντι της Μαθηματικής. Πάσα θεωρία φυσική είτα χρειάζεται την αντίληψιν αυτής απαραιτήτως. Η Υδραυλική, η Υδροστατική, η Μηχανική, η Οπτική, η Αστρονομία, η Γεωγραφία, άλλαι πολλαί τας οποίας αποσιωπώ, πάσαι δεικνύονται δια της Μαθηματικής…»*[12]. Αντιλαμβάνεται κανείς σήμερα πόσο μακρυά έβλεπε από τότε ο Μοισιόδακας, ο οποίος συνεχίζει λέγοντας ότι για τον μαθηματικό και φυσικό φιλόσοφο χρειάζονται «*αι αναλυτικαί εξισώσεις και αι σειραί των απειροστών, των ολικών,*[13] *των διαφορικών και αι θεωρίαι των υπερβολών, των ελλείψεων, των παραβολών, και τα μηχανικά, τα οπτικά και οι λόγοι των κεντρικών δυνάμεων…*».[14] Ας συμπληρώσω ότι σ' αυτό το χωρίο έχουμε και την πρώτη εμφάνιση σ' ελληνικό έντυπο της εποχής της Τουρκοκρατίας, ορισμένων όρων των ανωτέρων Μαθηματικών. Ανάλογη με τον Μοισιόδακα είναι και η γνώμη του Κούμα ο οποίος λέει «*ο της Φυσικής Επιστήμης την Μαθηματικήν*

Ξενοκράτης τον ρώτησε αν ήξερε Γεωμετρία. Στην αρνητική απάντηση του νέου είπε «*πορεύου, λαβάς ουκ έχεις φιλοσοφίας*». Δηλαδή, «πήγαινε, δεν έχεις τις προαπαιτούμενες γνώσεις για φιλοσοφία».

[8] Βεν. Λεσβίου, *Στοιχ. Αριθμητικής*, Βιέννη 1818, Πρόλογος.

[9] Κ. Κούμας, *Σύνταγμα Φιλοσοφίας*, Βιέννη 1818, Επιστολή προς Φρ. Μαύρον, τόμος Α', σελίδα στ'.

[10] Κ. Κούμας, *Ιστ. Ανθρ. Πράξ.*, τόμος ΙΒ', σελίδα 558.

[11] Ι. Μοισιόδακος, ένθ. αναφ., σελίδα 113.

[12] Μοισιόδακος, ένθ. Αναφ., σελίδα 90.

[13] Δηλαδή τα ολοκληρώματα.

[14] ένθ. αναφ., σελίδα 28.

αποσπάσαι και απαλλοτριώσαι, πειρώμενος, ουδέν έλαττον ει μη και μάλλον, έσται καταγέλαστος».[15]

Τα Μαθηματικά στην τουρκοκρατούμενη Ελλάδα ήρθαν από την Δύση. Την Δύση που με τη σειρά της τα πήρε από την αρχαία Ελλάδα, και που τα καλλιέργησε σε υψηλό βαθμό όταν η Ελλάδα έμεινε ανήμπορη. «Η Ελλάς», λέει ο Κούμας «*η τους Φιλοσόφους ενεγκαμένη, και θρέψασα, η την Ευρώπην πάσαν παιδεύσασα, δι' ην τοσαύτα και τοιούτα αγαθά τοις νυν ευνομουμένοις περίεστιν έθνεσι, δουλείας καθυπαχθείσα απηνεστάτω ζυγώ, απεστέρηται μεν των προτέρων της σοφίας αυτής θησαυρών, γεγύμνωτε δε των περικλεών ωραϊσμών, και Καρτεσίων και Νευτώνων εν τη ευεργετηθείση Ευρώπη ακμαζόντων, η δε έκειτο πένης και κατηφής*».[16] Αλλά, λέει πιο κάτω ο Κούμας, «*διακαής τας ανέφλεγε καρδίας ο ζήλος*» για περισσότερη και τελειότερη μάθηση. Γι' αυτό «*παρά τας εν σοφία υμνουμένας των ευρωπαίων πόλεων απεδήμουν*» για να μετακομίσουν στην Ελλάδα την γνώση των ξένων, όπως ακριβώς οι αρχαίοι μας πατέρες «*απ' Αιγύπτου, εις την Ελλάδα μετέγκοιεν της σοφίας τα αγαθά*».[17] Και καταλήγει ότι «*ούτως η Ελλάς περί την φιλοσοφίαν διεγερθείσα έρωτι…εκ των εν Ευρώπη Ακαδημιών μετακομίσαντες τον υγιά του φιλοσοφείν τρόπον, και προ πάντων τα Μαθηματικά όργια*».[18] Ανάλογη είναι και η γνώμη του Μοισιόδακα, που λέει ότι αφού οι αρχαίοι «*δεν αισχύνονται να ερανίζονται από Αιγυπτίους, από Φοίνικας, από Χαλδαίους…*» και αφού τα περισσότερα αρχαία ελληνικά συγγράμματα χάθηκαν ενώ η Ευρώπη έχει πλημμυρίσει από σοφότατες Ακαδημίες, «*έχει χρείαν η Ελλάς από την Ευρώπην*».[19]

Τελικά, για να χρησιμοποιήσω την έκφραση του Βενιαμίν του Λέσβιου, τα Μαθηματικά «*η θεία πρόνοια ηυδόκισε να επιστραφώσι ως Πιερίδες μούσαι εις την ιδίαν αυτών πατρίδα και να έλθωσιν εις Παρνασσόν*».[20]

Οι φωτεινές εξαιρέσεις στο μέσο επίπεδο της μαθηματικής παιδείας του υπόδουλου Γένους, έφεραν στο φως δια του τύπου μια σειρά από ενδιαφέροντα μη στοιχειώδη μαθηματικά έργα. Θα απαριθμήσουμε τα «πιο προχωρημένα» από αυτά, αλλά επειδή το θέμα είναι μεγάλο, θ' ασχοληθούμε μόνο με τα δύο πρώτα.

α) ΟΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ, Μεθοδίου Ανθρακίτη, 3 τόμοι, Βενετία 1749.

β) ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, Νικηφόρου Θεοτόκη, 3 τόμοι, Μόσχα 1798 – 99, (αλλά σε χειρόγραφα τουλάχιστον από το 1764).

---

[15] Κ. Κούμα, *Σειρά Στοιχειώδους των Μαθηματικών και Φυσικών πραγματειών*, Βιέννη 1807, Πρόλογος σελίδα ιγ'.

[16] Κ. Κούμα, Σειρά Στοιχειώδους των Μαθηματικών…σελ. ιδ.

[17] Ομοίως, σελίδα ιστ'.

[18] Ομοίως, σελίδα ιζ'.

[19] Ιωσ. Μοισιόδακος, *Ηθική Φιλοσοφία*, 1761, προοίμιον.

[20] Βενιαμίν του Λεσβίου, *Γεωμετρίας Ευκλείδου Στοιχεία*, Βιέννη 1820, τόμος Β', Πρόλογος.

γ) ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑΙ ΑΙ ΑΡΧΟΕΙΔΕΣΤΑΤΟΙ, Ιωάν. Ανδρ. Σεγνέρου (J.A. von Segner), σε μετάφραση Ευγενίου Βουλγάρεως, 2 τόμοι, Λειψία, 1767–68.

δ) ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΤΕ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΑΣ, Αββά δελά Καϊλλέ (Abbe de la Caille), μετάφραση Σπυρίδωνος Ασάνη σε «καθωμιλουμένη απλοελληνική» και από κει εις την «Ελληνίδα μεθηρμηνεύσατο» ο Ιωνάς Ιερομόναχος Σπαρμιώτης, Βενετία, 1797, (τίτλος πρωτότυπου, *Lecons elementaires de Mathematiques*), εκδόθηκε στο Παρίσι 1772.

ε) ΣΥΝΟΨΙΣ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ, Γουΐδωνος του Γρανδή (Guidonis Grandi), σε μετάφραση Σπυρίδωνος Ασάνη εις την «καθ’ ημάς απλουστέραν διάλεκτον» και από κει «μετήνεκται εις την Ελληνικήν» ο Ιωνάς Ιερομόναχος Σπαρμιώτης, Βιέννη, 1802, (τίτλος πρωτότυπου, *Sectionum Conicarum Synopsis*, εκδόθηκε στην Φλωρεντία 1750).

στ) ΣΕΙΡΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ, Κ. Κούμα, 8 τόμοι, Βιέννη, 1807.

Πριν κλείσουμε την εισαγωγή ας αναφέρουμε ότι την εποχή της Τουρκοκρατίας κυκλοφορούσαν και άλλα έργα σε μορφή χειρόγραφου.[21] Επίσης το βιβλίο του Αββά δελά Καϊλλέ είναι το πρώτο έντυπο βιβλίο Άλγεβρας στην Ελλάδα και το έργο του Κούμα είναι το πιο προχωρημένο και σύγχρονο από τα μαθηματικά κείμενα της Τουρκοκρατίας. Τέλος, υπάρχουν μαρτυρίες ότι ορισμένα από τα παραπάνω μη στοιχειώδη έργα είχαν κάποια ζήτηση. Παραδείγματος χάριν για τις Κωνικές τομές του Γρανδή, είχαν γραφτεί 108 συνδρομητές για 228 αντίτυπα από τα οποία τα 10 για την σχολή των Αμπελακίων.[22] Για το ίδιο βιβλίο σε επιστολή του[23] ο Κούμας παραγγέλνει του Άνθιμου Γαζή να τυπωθεί σε χίλια αντίτυπα, αριθμός μεγάλος και για τα σημερινά δεδομένα.

Η ΟΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΤΟΥ ΑΝΘΡΑΚΙΤΗ

Το κύριο θέμα της ομιλίας μας είναι το μαθηματικό έργο του Νικηφόρου Θεοτόκη. Επειδή όμως το κατ’ εξοχήν προχωρημένο βιβλίο Μαθηματικών στην τουρκοκρατούμενη Ελλάδα πριν από τον Θεοτόκη, ήταν το βιβλίο του Ανθρακίτη θ’ αρχίσουμε από εκεί. Σκοπός μας είναι να συγκρίνουμε τα δύο έργα, να εξετάσουμε τις «ελλείψεις» του πρώτου, να δούμε τι παραπάνω λέει ο Θεοτόκης και κυρίως, γιατί.

[21] Παραπέμπουμε στο βιβλίο του Γιάννη Καρά, *Οι φυσικές-θετικές επιστήμες στον ελληνικό 18ο αιώνα*, εκδόσεις Gutenberg Αθήνα 1977, για λεπτομερείς καταλόγους και πληροφορίες.

[22] Σελίδες XV έως XX του έργου.

[23] Ιωάννου Οικονόμου Λαρισαίου, *Επιστολαί διαφόρων 1759 – 1824*. Επανέκδοση Γ. Αντωνιάδη και Ν.Μ. Παπαϊωάννου, Αθήνα 1964. Επιστολή υπ’ αριθμόν 64.

Ο Μεθόδιος Ανθρακίτης (περ. 1660 – περ. 1749),[24] γεννήθηκε στα Γιάννενα και υπήρξε μαθητής του Σουγδουρή. Αργότερα πήγε στην Ιταλία για σπουδές όπου σπούδασε Μαθηματικά, Μηχανική, Αστρονομία και Φιλοσοφία. Δεν θ' αναφερθούμε όμως άλλο στα βιογραφικά στοιχεία της φυσιογνωμίας αυτής του ελληνικού Διαφωτισμού, του κατατρεγμένου πρόδρομου που είδε τα βιβλία του να καίγονται δημοσία.[25] Θα αρκεστούμε μόνο σ' ότι αφορά τα Μαθηματικά.

Οι πηγές αναφέρουν ότι ο Ανθρακίτης ήταν ο πρώτος ο οποίος έφερε από την Ευρώπη τα άγνωστα τότε στην Ελλάδα προχωρημένα Μαθηματικά. Γράφουν οι Ζωσιμάδες «…*ο αοίδημος εκείνος των Μαθηματικών διδάσκαλος, ο Μεθόδιος, ώσπερ ναυς τις μεγαλέμπορος από τας δυτικάς επιστρέψας χώρας, τους Ευκλείδας και Αρχιμήδας και Απολλωνίους και Διοφάντους επί την Ελλάδα επαναγαγών, εις την των Ιωαννίνων Σχολήν εισήγαγεν…*»[26] και συμπληρώνει ο Κούμας ότι «*ούτος ο θαυμάσιος ανήρ μετεκόμισε εις τα Ιωάννινα τας Γεωμετρικάς γνώσεις, αι οποίαι έλειπαν προ χρόνων…*».[27] Παρόμοιο σχόλιο παραθέτει και ο Κοσμάς Μπαλάνος (γιος του μαθητή του Ανθρακίτη και εκδότη της *Οδού Μαθηματικής*, Μπαλάνου Βασιλόπουλου) που γράφει ότι «*Μεθόδιος ιερομόναχος Ανθρακίτης…ο οποίος μετεκόμισεν από τα Δυτικά μέρη εις την Ελλάδα τας Μαθηματικάς επιστήμας…*».[28]

Η *Οδός Μαθηματικής* εκδόθηκε το 1749 (δηλαδή το έτος θανάτου του συγγραφέα). Την έκδοση «αναπτυχθείσα τε και καλυνθείσα» την επιμελήθηκε ο μαθητής του και σχολάρχης τότε (από το 1723 έως το 1760) στην Σχολή του Γκιούμα, Μπαλάνος Βασιλόπουλος. Η γλώσσα του κειμένου είναι αττικίζουσα Νέα Ελληνική, ενώ για πρώτη φορά στα ελληνικά εκδοτικά εμφανίζεται ο θεσμός των συνδρομητών στα βιβλία.

Η κυκλοφορία της *Οδού* είναι ένα μεγάλο βήμα στην μαθηματική εκπαίδευση του τόπου. Από κει που το μόνο έντυπο μαθηματικό βιβλίο για σχεδόν 200 χρόνια, από το 1568, ήταν η «*Πρακτική Αριθμητική, ή μάλλον ειπείν η λογαριαστική*» του Μανουήλ Γλυζωνίου, το περιβόητο «*Γλυτζούνι*»,[29] ή κανένα – δυο παρόμοια, ξαφνικά εμφανίζεται η *Οδός Μαθηματικής*.

---

[24] Στο επίμετρο της *Σύνοψης της Ιστορίας της Φιλοσοφίας* του Tenneman, μετάφρ. Κούμα, Βιέννη 1818, επανέκδ. Ακαδημίας Αθηνών 1973, αναφέρεται εσφαλμένα η ημερομηνία 1730.

[25] Για τα βιογραφικά του μπορεί ν' ανατρέξει κανείς στις συνήθεις πηγές, Ζαβίρα, Σάθα, Κούμα, βασική βιβλιοθήκη ή στα λήμματα των εγκυκλοπαιδειών και στη βιβλιογραφία τους.

[26] Από τον πρόλογο, που υπογράφουν οι Ζωσιμάδες, των *Στοιχείων Μαθηματικών* του Θεοτόκη.

[27] Κούμα, *Ιστ. Ανθρ. Πράξ.* Τομ. ΙΒ', σελίδα 558. Στην προηγούμενη σελίδα ο Κούμας μας λέει ότι «*εις την πόλιν των Ιωαννίνων χρωστεί η Ελλάς την αναγέννησιν της παιδείας*».

[28] Κοσμάς Μπαλάνος, *Έκθεσις Συνοπτική Αριθμητικής, Άλγεβρας και Χρονολογίας,* Βιέννη 1798, πρόλογος.

Για άλλα όμοια χωρία βλέπε α) Tenneman ενθ. αναφ. σελίδα 208, β) Ευθυμίου Καστόρχη, *Περί της εν Δημητσάνη Σχολής*…Προλεγόμενα, σελίδα η'.

[29] Μανουήλ Γλυζωνίου, *Βιβλίον Πρόχειρον τοις πάσι περιέχον την τε Πρακτικήν Αριθμητικήν*…Ενετίησιν 1568.

Εμφανισιακά η *Οδός* είναι υπόδειγμα προς μίμησιν και θυμίζει τις περίφημες εκδόσεις βιβλίων Γεωμετρίας της εποχής της Αναγεννήσεως στη Δύση.[30] Στο πρώτο φύλλο γράφει ότι το έργο μεταφράστηκε από τα Λατινικά. Δεν μπόρεσα να εντοπίσω κανένα συγκεκριμένο λατινικό έργο από το οποίο να μετέφρασε ο Ανθρακίτης. Υποθέτω ότι θα βασίστηκε σε διάφορα έργα, μεταφράζοντας κατά περίπτωση. Η επιλογή της ύλης είναι πολύ ενδιαφέρουσα και η έκφραση («καλυνθείσα» υπό του Μπαλάνου) είναι προσεγμένη και κατά μίμηση των σπουδαίων αρχαίων ελληνικών μαθηματικών έργων που γράφτηκαν για εκπαιδευτικούς σκοπούς (όπως είναι τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη). Πόσο δίκιο είχε ο Μοισιόδακας όταν έγραφε ότι «*Πανταχού ο περίβλεπτος αυτός ανήρ*», δηλαδή ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος, «*φέρεται μετά πάσης της δυνατής σαφήνειας και πληρότητας…Φράσεις εζητημέναι, περικοπαί ρητορικαί, γρίφοι τετεχνευμένοι, στίχων παρωδίαι, έτερα, τα οποία παρ' άλλοις νομίζονται εγκοσμήματα αναγκαία τῃ Φιλοσοφία, πάντα ενομίσθησαν τῳ ανδρί βατταρίσματα απάδοντα της Φιλοσοφίας. Πεπεισμένος πως τα επιστημονικά είναι καθ' εαυτά ωραία, και πώς, όσον απλούστερα εκτίθενται, τοσούτον ωραιότερα φαίνονται, υπτίασε το ύφος αυτού επίτηδες…*».[31]

Η σύντομη περιγραφή που ακολουθεί του ογκοδέστατου τρίτομου[32] αυτού έργου, που αποτελείται από 1516 σελίδες μεγάλου σχήματος, οπωσδήποτε το αδικεί. Τα περιεχόμενα της *Οδού* είναι:

Τόμος Α, τα 15 (βλέπε παρακάτω) βιβλία των *Στοιχείων* του Ευκλείδη και τα *Σφαιρικά* του Θεοδοσίου.

Τόμος Β, Γεωμετρία (θεωρητική και πρακτική) και Τριγωνομετρία.

Τόμος Γ, Πρόκλου *Σφαίρα*. *Περί χρήσεως των σφαιρών*, *Αστρολάβιον* του Γορδάτου, Γεωγραφία και Οπτική.

Ας σχολιάσουμε, έστω και επιγραμματικά, τα περιεχόμενα αυτά. Ως γνωστόν, τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη είναι σε 13 βιβλία. Τα άλλα δύο που περιέχονται στον Α τόμο της Οδού, και που έχει επικρατήσει στη βιβλιογραφία να ονομάζονται το 14ο και 15ο βιβλίο των Στοιχείων αντίστοιχα, είναι ψευδεπίγραφα. Ο Ανθρακίτης το έχει αυτό υπ' όψιν του και αναφέρει ότι πιθανόν να είναι έργα του Υψικλέους. Οι σύγχρονοι ερευνητές τα αποδίδουν

---

[30] Αξίζει να φυλλομετρήσει κανείς ένα καλό αντίτυπο του έργου, όπως αυτό που υπάρχει στη Γεννάδιο Βιβλιοθήκη.

[31] Μοισιόδαξ, *Απολογία*, ενθ. αναφ. σελίδα 41.

[32] Το έργο προοριζόταν για τετράτομο αλλά ο τέταρτος τόμος δεν εκδόθηκε μαζί με τους άλλους. Εκδόθηκε αργότερα, το 1798 από τον Κοσμά Μπαλάνο. Ο τέταρτος τόμος με 190 σελίδες πραγματεύεται πιο στοιχειώδη θέματα, κυρίως πρακτικής Αριθμητικής. Συγκεκριμένα από τη σελίδα 1 έως 137 τα κλάσματα, απλή μέθοδος των τριών, εξαγωγή ριζών. Από 138 έως 187 έχει «Θεωρητική Αριθμητική», η οποία όμως είναι πολύ απλή και κυρίως περιγραφική. Ακολουθεί κάπως την Αριθμητική Εισαγωγή του Νικομάχου του Γερασινού.

στον Υψικλή και τον Ανθέμιο αντίστοιχα.[33] Ας τονίσουμε εδώ ότι στο έργο του Θεοτόκη που θα εξετάσουμε παρακάτω, υπάρχουν τα μισά περίπου από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, αλλά θα δούμε το γιατί. Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη δεν περιέχουν σχεδόν τίποτα από την Γεωμετρία της Σφαίρας. Το κενό το αναπληρώνουν τα *Σφαιρικά* του Θεοδοσίου, τα οποία ασχολούνται μ' αυτό ακριβώς το θέμα.

Ο Β τόμος ασχολείται εκτενώς, μεταξύ άλλων, με γεωμετρικές κατασκευές. Παραδείγματος χάριν περιέχει τις κλασσικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη που υπάρχουν στα *Στοιχεία*. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και ορισμένες προσεγγιστικές κατασκευές με πρακτικό στόχο, όπως ο σχεδιασμός (με κανόνα και διαβήτη) ωοειδούς, ελλείψεως κλπ. Τα επόμενα δύο κεφάλαια δείχνουν την μεγάλη έμφαση που δίνει ο συγγραφέας στις κατ' εξοχήν εφαρμογές των Μαθηματικών (ιδίως της Γεωμετρίας) στην πρακτική ζωή. Εδώ υπάρχουν περιγραφές για κατασκευές γεωμετρικών οργάνων (δηλαδή σχεδιασμό, διαβάθμιση και λειτουργία τους) όπως αναλογικών διαβητών,[34] γωνιομέτρων, τοπογραφικών οργάνων κλπ. Για να πετύχει αυτά ο συγγραφέας χρησιμοποιεί κατά κόρον τη θεωρητική γνώση που έχει αναπτύξει μέχρι το σημείο αυτό. Στο επόμενο κεφάλαιο συνεχίζει με πρακτικά προβλήματα χρήσης των οργάνων αυτών (π.χ. «μέτρηση ύψους πύργου» με διοπτεύσεις, κλπ). Αποκορύφωμα του τόμου αυτού είναι το επόμενο κεφάλαιο που περιέχει Τριγωνομετρία (θεωρητική και πρακτική), κατασκευή τριγωνομετρικών πινάκων μεγάλης ακρίβειας και τέλος σφαιρική Τριγωνομετρία με στόχο την Αστρονομία του Γ τόμου. Ας προσθέσω ότι αυτή η Σφαιρική Τριγωνομετρία συμπληρώνει τα *Σφαιρικά* του Θεοδοσίου, του Α τόμου, τα οποία δεν περιέχουν καθόλου ιδέες της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας. Στον Γ τόμο γίνεται χρήση όλων σχεδόν των προηγούμενων γνώσεων για να καλύψει τα θέματα που αναφέρθηκαν παραπάνω, στα περιεχόμενα της *Οδού*.

Πιστεύω ότι το έργο του Ανθρακίτη είναι μνημειώδες. Αν κρίνει κανείς από την επιλογή της ύλης, φαίνεται ότι ο Ανθρακίτης έχει πολύ καλή «σφαιρική εικόνα» των κλασσικών (της εποχής του) Μαθηματικών, τα οποία εκθέτει με μια σωστή ισορροπία μεταξύ θεωρητικών και πρακτικών θεμάτων.

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, οι μέθοδοι της *Οδού* ανήκουν στην κλασσική, την συνθετική όπως λέγεται Γεωμετρία. Στην *Οδό* δεν περιέχονται η Αναλυτική Γεωμετρία του Καρτέσιου, η Άλγεβρα και ο Απειροστικός Λογισμός, παρ' όλο που οι κλάδοι αυτοί είχαν αναπτυχθεί την εποχή εκείνη.[35] Το κενό

---

[33] Βλέπε π.χ. Heath, *Euclid. The Elements* και του ίδιου *History of Greek Mathematics*, εκδ. Dover.

[34] Σχετικά με τον αναλογικό διαβήτη είναι ενδιαφέρον να παραθέσουμε ένα χωρίο του βιογράφου του Ζαβίρα, στο *Θέατρον Ελληνικόν,* που λέει ότι ο Ανθρακίτης σπούδασε στην Ιταλία μαθηματικά κλπ. κλπ. «και όσα δια του αναλογικού διαβήτου πολυτρόπως άμα και ευμεθόδως θηρεύεται».

[35] Χωρίς αυτό να σημαίνει ότι ο Ανθρακίτης δεν γνώριζε αυτούς τους κλάδους, αντίθετα μάλιστα, αφού είχε σπουδάσει και Μηχανική στην Ιταλία. Από την άλλη φαίνεται ότι ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος δεν τους γνωρίζει. Σ' αυτό το σημείο ο Κούμας είναι κατηγορηματικός, «ο Βαλάνος έμπειρος πολύ της στοιχειώδους Γεωμετρίας, αλλά αγνοών τα της υψηλοτέρας Μαθηματικής...» (*Ιστ.*

αυτό το επισημαίνει ο Νικηφόρος Θεοτόκης, ο οποίος θα επιχειρήσει να το καλύψει.

ΝΙΚΗΦΟΡΟΣ ΘΕΟΤΟΚΗΣ

Ο Θεοτόκης (1731 – 1800) γεννήθηκε στην Κέρκυρα και σπούδασε (1749 – 1754) Ιατρική και Φυσικομαθηματικά στην Πάντοβα και Μπολώνια. Χρημάτισε διευθυντής της Αυθεντικής Ακαδημίας στο Ιάσιο και διαδέχτηκε τον κατά 15 χρόνια μεγαλύτερό του Ευγένιο Βούλγαρη στον αρχιεπισκοπικό θρόνο το 1779.[36]

Τα σπουδαιότερα από τα επιστημονικά συγγράμματά του είναι τα *Στοιχεία Μαθηματικών* και τα *Στοιχεία Φυσικής*. Για το ύφος του Θεοτόκη σαν συγγραφέα δεν θα μπορούσαμε να είμαστε πιο περιεκτικοί από τον Στούρντζα που (σε μετάφραση Σούτσου) γράφει: «ο Νικηφόρος και λέγων και γράφων έτεινε πάντοτε και υπέρ παν άλλο εις το εύληπτον και ακριβές, δι' ό όλα του τα συγγράμματα ομολογούνται παρά πάντων ως υπόδειγμα των δύο τούτων αρετών του λόγου και ως αμίμητα δια το διαυγές της φράσεως και το έντονον του συλλογισμού».[37]

Για να μην νομιστεί ότι ο Στούρντζας εκθειάζει υπερβολικά τον Θεοτόκη, ας αναφέρω ότι στην αμέσως προηγούμενη παράγραφο γράφει για το ύφος του Βούλγαρη,[38] τον οποίο κατά τα άλλα εξυμνεί, ότι «επετηδεύετο του λόγου την γλαφυρότητα επιδεικνύμενος τον πλούτον της παντοδαπής πολυμάθειας, δι' ό και πολλά των συγγραμμάτων του εισί στρυφνά και δυσνόητα».

Στην παρούσα εργασία θα μας απασχολήσει το μαθηματικό έργο του Θεοτόκη. Συγκρίνοντάς τον με τον Βούλγαρη ο Κούμας, λέει ότι στις μαθηματικές επιστήμες ο Θεοτόκης «υπερέβαινε κατά πολύ τον Ευγένιο».[39]

Ανθρ. Πραξ. Τόμος ΙΒ, σελ. 562). Το ίδιο συμπέρασμα βγαίνει όταν διαβάσει κανείς την επιστολή του Θεοτόκη προς τον Μπαλάνο το 1756 (η επιστολή αναδημοσιεύτηκε στην *Αντιπελάργηση* το 1816), που του εξηγεί ότι η Ανάλυση έχει «ταις ιδίαις αρχαίς και τα αυτά αξιώματα κλπ με την Γεωμετρίαν». Στην ίδια επιστολή, με αφορμή την (εσφαλμένη) λύση του Δήλιου προβλήματος από τον δεύτερο, ο Θεοτόκης του γράφει κριτικάροντάς τον, ότι σε «όσους σπουδάζουν και καταγίνονται με την Ανάλυση» τους είναι φανερό ότι το πρόβλημα αυτό δεν λύνεται.

[36] Δεν θα επεκταθούμε άλλο στα βιογραφικά του Θεοτόκη, τα οποία καλύπτονται επαρκώς από πολλές πηγές. Π. χ. Αλέξ. Στούρτζα, *Αναμνήσεις και Εικόνες* Αθήνα 1858, Α. Γούδα, *Βίοι Παράλληλοι* 1870 κλπ.

[37] Στούρτζα, ένθα αναφέρεται και Γούδα ένθα αναφέρεται.

[38] Συχνά οι βιογράφοι του Θεοτόκη τον συγκρίνουν με τον Βούλγαρη, γιατί οι βίοι των δύο αυτών Κερκυραίων λογίων έχουν πολλά κοινά.

[39] Κούμας, *Ιστ. Ανθρ. Πράξ.* Τόμος ΙΒ, σελίς 564.

Σώζονται επιστολές από τις οποίες μπορεί να βγει το συμπέρασμα ότι τα *Στοιχεία Μαθηματικών* του Θεοτόκη είχαν ζήτηση μεταξύ των διδασκάλων του Γένους. Παραδείγματος χάριν, έχουμε επιστολή του αρχιεπισκόπου Ελασσώνος, Δομενίκου Ιωαννίκιου, προς Ζωσιμάδες στις 15-5-1802, που παραπονείται ότι δεν έφτασαν σ' αυτούς και στη Σχολή της Τσαρίτσανης τα Μαθηματικά του Θεοτόκη. Γράφει λοιπόν «…να επιτάξητε ένα σταλθώσιν ημίν εκ τε των Θεοτοκείων μαθηματικών μερικά σώματα…»[40] Επίσης σ' επιστολή του Άνθιμου Γαζή προς τον Κούμα, από τις Μηλιές στην Τσαρίτσανη στις 22-2-1803, γράφει «με τον αγωγιάτην σοι στέλνω…τα Μαθηματικά του Θεοτόκη…».[41] Λίγες μέρες αργότερα, στις 5-3-1803, ο Κούμας έγραψε στον Ιωνά Σπαρμιώτη να του στείλει και άλλα αντίτυπα των Μαθηματικών του Θεοτόκη, αλλ' αυτός απαντά ότι του στέλνει «…το Μπαλάνιον Μαθηματικόν, επειδή τα Θεοτόκεια εξέλιπον διανεμηθέντα…».[42] Τέλος σώζονται επιστολές του Δωρόθεου Πρώιου προς Ζωσιμάδες και αντίστροφα, και του Πρώιου προς Βενιαμίν Λέσβιο και αντίστροφα, που λένε ότι 49 αντίτυπα των Μαθηματικών του Θεοτόκη εστάλησαν στη Σχολή Κουρουτζεσμέ της Κων/πολης, 8 από τα οποία πήγαν στις Κυδωνιές.[43]

Τα *Μαθηματικά* του Θεοτόκη τυπώθηκαν στη Μόσχα το 1798-1799, λίγο πριν από το θάνατο του συγγραφέα. Με άλλα λόγια η εκτύπωσή τους έγινε 32 χρόνια αργότερα από την περίφημη *Φυσική* του, 1766-1767 στην Λειψία.

Η *Φυσική* του Θεοτόκη δεν είναι δυνατόν να μελετηθεί χωρίς βαθειά γνώση σύγχρονων για την εποχή εκείνη και αρκετά προχωρημένων Μαθηματικών. Ο χαρακτηρισμός της *Φυσικής* αυτής του Θεοτόκη ως «εφαρμοσμένης Μαθηματικής» από τον Κούμα,[44] είναι επιτυχής. Η μελέτη της προϋποθέτει γνώσεις Απειροστικού Λογισμού, τον οποίο ο συγγραφέας χρησιμοποιεί θεωρώντας ότι ο αναγνώστης τον κατέχει, και αυτά χωρίς να υπάρχει την εποχή εκείνη έντυπο ελληνικό βιβλίο που να τον περιέχει. Παραδείγματος χάριν στην μελέτη του εκκρεμούς, σ' ένα βήμα της απόδειξης χρησιμοποιεί τον τύπο της υφαπτομένης (βλέπε παρακάτω), τον οποίο κατονομάζει (σωστά) σαν y dy/dx, αλλά χωρίς να παραπέμπει πουθενά. Ας σημειώσουμε ότι στο σημείο αυτό έχουμε την πρώτη χρήση παραγώγων και ολοκληρωμάτων στην έντυπη ελληνική μαθηματική βιβλιογραφία της εποχής της Τουρκοκρατίας. Θα επανέλθουμε σ' αυτό το θέμα. Συμπληρώνουμε μόνο ότι η σωστή διδασκαλία της *Φυσικής* του Θεοτόκη χωρίς το κατάλληλο μαθηματικό υπόβαθρο ήταν, οπωσδήποτε, προβληματική. Άλλωστε αυτό το ομολογεί και ο εξαίρετος Ιωάννης Πέζαρος όταν λέει ότι η διδασκαλία του της Φυσικής «είναι ατελής επειδή του έλλειπαν τα πειράματα, η γνώσις

---

[40] Ιωάννου Οικονόμου, ένθ. αναφ., επιστολή 62.
[41] Ομοίως, επιστολή 69.
[42] Ομοίως επιστολή 86.
[43] Κ. Δημαράς, *Νεοελληνική Επιστολογραφία*.
[44] Κούμας, ένθ. αναφ. σελίς 564.

τελειοτέρας Αλγέβρας, η των Κωνικών τομών, και η του Λογισμού της ως άπειρον θεωρουμένης ποσότητος».[45]

Η έλλειψη λοιπόν βιβλίου Μαθηματικών που να περιέχει την Ανωτέρα Άλγεβρα και τον Απειροστικό Λογισμό είχε γίνει εμφανής. Το χειρόγραφο των *Στοιχείων Μαθηματικών* του Θεοτόκη που κυκλοφορούσε τουλάχιστον από το 1764, δηλαδή 2 χρόνια πριν από την έκδοση της *Φυσικής*, δεν ήταν δυνατόν να καλύψει το κενό. Η δια των τύπων εμφάνισή τους ήταν επιτακτική.

Ο Θεοτόκης από νωρίς είχε αναγνωρίσει τις ευρύτερες δυνατότητες των συγχρόνων του Μαθηματικών. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η επιστολή του προς Μπαλάνο Βασιλόπουλο (βλέπε παραπάνω) την οποία έγραψε σε ηλικία 25 ετών το 1756: «…όλοι όσοι σπουδάζουν και καταγίνονται με την Ανάλυσιν, λύουν αναλυτικώς, όσα συνθετικώς δηλαδή γεωμετρικώς προβάλλονται και ευκολότερα και συντομότερα και δεν είναι πρόβλημα στην Γεωμετρίαν το οποίο αναλυτικώς να μην διαλύεται, καθώς εις τα περί Αναλύσεως βιβλία φαίνεται. Προσέτι λύονται τη δυνάμει της αναλύσεως και του λογισμού της ολοκληρίας κάποια προβλήματα, τα οποία μόνη τη δυνάμει της συνθέσεως αδύνατον, ή δυσκολώτατον είναι να λυθώσιν. Όσα δε προβλήματα αδύνατον είναι να λυθώσι καθώς είναι ο τετραγωνισμός του κύκλου, και άλλα όμοια, φανερά μας το παριστάνει η ανάλυσις…Η ανάλυσις μία και αυτή επιστήμη είναι με την γεωμετρίαν, ταις ιδίαις αρχαίας, τα αυτά αξιώματα και τας αυτάς υποθέσεις έχει, και κατ’ ουδέν της Γεωμετρίας διαφέρει, ειμή μόνον ότι η μεν αναλυτικώς και συντόμως οδεύει, η δε συνθετικώς και εκτεταμένως. και δια τούτο η μεν ανάλυσις, η δε σύνθεσις παρά πάντων καλείται. Καλείται δε η αυτή ανάλυσης και Γεωμετρία υψηλοτέρα, και Γεωμετρία απλώς, μέθοδος του ευρίσκειν, και με το Αραβικόν όνομα Άλγεβρα».[46]

Διαβάζοντας τον πρόλογο των *Στοιχείων Μαθηματικών* αντιλαμβάνεται κανείς γιατί έγραψε ο Θεοτόκης το βιβλίο αυτό. Οι απόψεις του είναι τόσο ξεκάθαρες (και σωστές) που τις παραθέτουμε χωρίς σχόλια: «Γεωμετρία δε λέγοντες, ου μόνον τα του Ευκλείδου νοούμεν στοιχεία. ταύτα γαρ η κλεις μόνον εστί των υψηλοτέρων μαθηματικών τας θύρας. αλλά και Αριθμητικήν, και Τριγωνομετρίαν, και Αρχιμήδεια θεωρήματα, και Κώνου τομάς, και Ανάλυσιν, την και Άλγεβραν καλουμένην…το τους νεοτέρους δηλονότι εκ των διασωθέντων συγγραμμάτων των παλιοτέρων τας αφορμάς λαβόντας, και υπ’ αυτών χειραγωγηθέντες, πολλά μεν ευρείς τα ταις άλλαις ανήκοντα μαθηματικαίς επιστήμαις πλείστα δε, ή βέλτιον φάναι, σχεδόν πάντα τα τη Αναλύσει, συντόμω αυτά και ευλήπτω τάξει εκφράσαντας και μεθόδω». Πιο κάτω δε γράφει, συγκρίνοντας με τους κλασσικούς «…τα συγγράμματα αυτών (δηλ. Ευκλείδη, Ευδόξου, Γεμίνου, Μαρίνου, Αρχιμήδη, Απολλωνίου, Πτολεμαίου, Πάππου, Διοφάντου, κλπ) τα μεν εξέλειπε, τα δε μάλα δυσεύρετα

[45] Κούμας, ένθ. αναφ. σελίς 570.

[46] Κοσμά Μπαλάνου, *Αντιπελάργησις,* Βιέννη 1816

και δυσπρόσιτα. κάν δε ραδία υπήρχεν η τούτων κτήσις, τοσούτον όμως επίπονος δια το μακροσκελές των εν τοις αποδείξεων, η τούτων κατάληψις, ώστε και χρόνου δειν πολλού και πόνου μακρού προς τι εγκρατείς τούτων γενέσθαι. τουναντίων δε ένεστιν εν τοις νεωτέροις Συντάγμασιν, αμέλειτοι το σύντομον άμα και το σαφές και το εύληπτον…».[47]

Ο Θεοτόκης λοιπόν μας ανέλυσε τα κριτήριά του για το τι έχει να προσθέσει στα παλιά βιβλία. Δεν κάνει όμως μόνο προσθήκες. Από την Ευκλείδεια γεωμετρία θα κρατήσει μόνο ένα τμήμα. Αλλά ποια είναι τα κριτήριά του; Απαντά μόνος του: «…εν τη στοιχειώδη δε Γεωμετρία και εν ταις του Κώνου τομαίς τη του Ευκλείδου και Απολλωνίου τάξει, εξ ών τα ταις λοιπαίς επιστήμαις αναγκαία συνελέξαμεν…».[48]

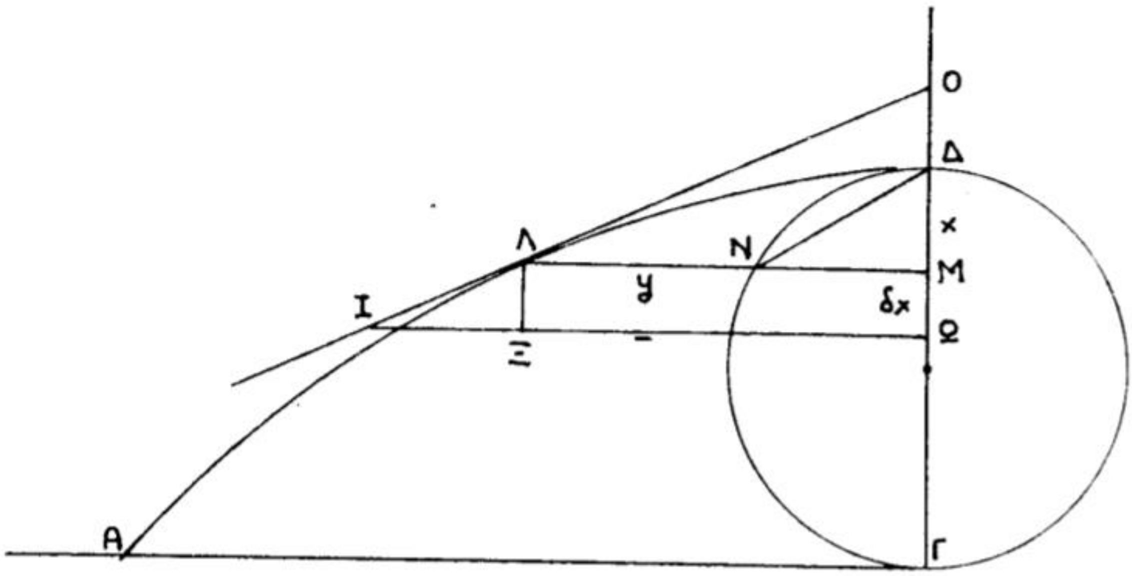
Ας δούμε όμως μερικά από τα μη στοιχειώδη Μαθηματικά στα κείμενα του Θεοτόκη. Θ' αρχίσουμε από τη Φυσική του, η οποία τυπώθηκε πρώτη. Από τα, εκ των πραγμάτων λίγα, αποσπάσματα που θα παραθέσουμε θα γίνει αντιληπτό το υψηλό επίπεδο των Μαθηματικών που απαιτούνται για την κατανόησή της.

Στο κεφάλαιο περί εκκρεμούς (παρ. 371 και εξής στον α' τόμο) αποδεικνύει πρώτα ορισμένες ιδιότητες της εφαπτομένης μιας καμπύλης (άρα χρησιμοποιεί παραγώγους), ολοκλήρωση, ακόμα και τον ολοκληρωτικό τύπο για το μήκος μιας καμπύλης. Όλα αυτά χωρίς να παραπέμπει σε άλλο κείμενο, ενώ συνήθως είναι σχολαστικός σ' αυτό το σημείο, πράγμα που σημαίνει, όπως είπαμε παραπάνω, ότι τα θεωρεί γνωστά.

Ας δούμε την φρασεολογία του την πρώτη φορά που εμφανίζεται η ανάγκη παραγώγισης.

Αμέσως μετά την απόδειξη μιας σχέσης της μορφής by = ax λέει ο Θεοτόκης: «ληφθέντων των απειράκις ελαχίστων μερών της εξισώσεως έσεται b·dy/dx = a·dx» και συνεχίζει «εάν ούν εν τω γραμματιδίω τω y·dy/dx τω εμφαίνοντι την υφαπτομένην[49] πάσης καμπύλης αντί του dx τεθεί το (ίσο του) b.dy/dx…». Την απόδειξη του τύπου της υφαπτομένης, που χρησιμοποίησε χωρίς παραπομπή ο Θεοτόκης, την δίνει 32 χρόνια αργότερα στα *Στοιχεία Μαθηματικών.* Αλλά ας δούμε και μία απόδειξη (μόνο στα κύρια βήματα) από την *Φυσική* του. Βρισκόμαστε στο σημείο όπου, αν ονομάσουμε ΑΙΛΔ την κυκλοειδή που προκύπτει από την κύλιση του εικονιζόμενου κύκλου (Σχ. 1), θέλουμε να βρεθεί το μήκος του τόξου ΛΔ της κυκλοειδούς, το οποίο αποδεικνύεται διπλάσιο της χορδής ΝΔ.

[47] Θεοτόκη, *Στοιχεία Μαθηματικών*, Μόσχα 1798-99, πρόλογος.
[48] Ομοίως.
[49] Η υφαπτομένη δεν χρησιμοποιείται σήμερα, αλλά συγγενεύει με την εφαπτομένη. Ως γνωστόν η εφαπτομένη μιας λείας καμπύλης έχει κλίση dy/dx. Η υφαπτομένη είναι το μήκος ΜΟ του σχήματος 1, το οποίο αποδεικνύεται ίσο με y.dx/dy.



Σχήμα 1

Αν θέσουμε ΔΜ=x, ΜΛ=y, ΓΔ=α, τότε ακολουθώντας τα βήματα του Θεοτόκη $\sqrt{\ }$ έχουμε: Έστω «μικρή» μεταφορά του Μ στο Ω με ΜΩ=δx και έστω η αντίστοιχη μικρή μεταφορά του ψ η ΙΞ=δψ. Έχουμε ότι τα τρίγωνα ΛΜΟ και ΙΛΞ είναι όμοια (προσοχή εδώ: το Ι δεν βρίσκεται επί της καμπύλης, αλλά η διαφορά από το μήκος ΙΞ είναι με τη σύγχρονη φρασεολογία αμελητέα). Από την άλλη, σε κάποιο προηγούμενο βήμα της απόδειξης έχει δείξει (εννοείται με χρήση παραγώγων) ότι η ΛΟ είναι παράλληλη της ΝΔ, οπότε το τρίγωνο ΛΜΟ είναι όμοιο με το ΝΜΔ που με τη σειρά του είναι όμοιο με το ΝΜΓ. Άρα ΙΞ/ΞΛ = ΓΜ/ΜΝ. Το πρώτο κλάσμα όμως είναι το dy/dx ενώ τα ΓΜ, ΜΝ εύκολα υπολογίζονται σαν *α-x* και $\sqrt{ax - x^2}$ αντίστοιχα. Καταλήγουμε λοιπόν στην σχέση dy/dx=(*α-x*)/$\sqrt{ax - x^2}$ ή ισοδύναμα $(dy)^2=((\alpha\text{-}x)/x)(dx)^2$. Σε αυτό το σημείο ο Θεοτόκης έχει κάνει την προεργασία για να υπολογίζει το μήκος του τόξου ΛΔ της καμπύλης. Χρησιμοποιεί, με σύγχρονα σύμβολα,[50] τον τύπο:

$\int \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$ dx,

ή όπως καμμιά φορά γράφεται,[51] $\int \sqrt{(\mathrm{dx})^2 + (\mathrm{dy})^2}$.

Η φρασεολογία του στο σημείο αυτό είναι: «εάν ουν ληφθή το γραμματίδιον $\sqrt{(\mathrm{dx})^2 + (\mathrm{dy})^2}$ το εμφαίνον το στοιχείον πάσης καμπύλης…». Αν αντικαταστήσουμε το $(dy)^2$ με το ίσο του που βρήκαμε παραπάνω, καταλήγουμε (με σύγχρονα σύμβολα) στο $\int \sqrt{a/x}$ dx, το οποίο ο Θεοτόκης δηλώνει πολύ σωστά ότι ισούται με $2\sqrt{ax}$. Καταλήξαμε λοιπόν ότι ΛΔ=$2\sqrt{ax}$.

Από την άλλη με χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος και απλής κλασσικής γεωμετρίας, είναι ΝΔ=$\sqrt{ax}$, από όπου το ζητούμενο: τόξο ΛΔ=2ΝΔ.

---

[50] Ο Θεοτόκης δεν χρησιμοποιεί καθόλου το σύμβολο του ολοκληρώματος αν και την εποχή εκείνη υπήρχε.

[51] Η κακή αυτή για τα σημερινά δεδομένα γραφή ήταν συχνή την εποχή εκείνη.

Μέχρι εδώ ασχοληθήκαμε μόνο με γεωμετρικές ιδιότητες της καμπύλης. Όλα αυτά τα χρησιμοποιεί ο Θεοτόκης σε συνδυασμό με τους νόμους της Φυσικής για να καταλήξει, αφού λύσει τη διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση εκκρεμούς που καταγράφει τόξα κυκλοειδούς, στην ιδιότητα του ταυτόχρονου: «ίσοις άρα χρόνοις τα άνισα της κυκλοειδούς τόξα διέρχεται. Τοιγαρούν τα εκκρεμή καταγράφοντα τόξα κυκλοειδούς δια της εαυτών κινήσεως, ισοχρόνους έχουσι τας εαυτών περιαγωγάς».

Ας έρθουμε στα *Στοιχεία Μαθηματικών* του Θεοτόκη. Τα περιεχόμενά τους είναι:

Τόμος Α. Τα βιβλία 1-6, 11, 12 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη και Αριθμητική.

Τόμος Β. Τα Αρχιμήδεια θεωρήματα και τα κωνικά του Απολλωνίου.

Τόμος Γ. Υψηλοτέρα Γεωμετρία και Απειροστικός Λογισμός.

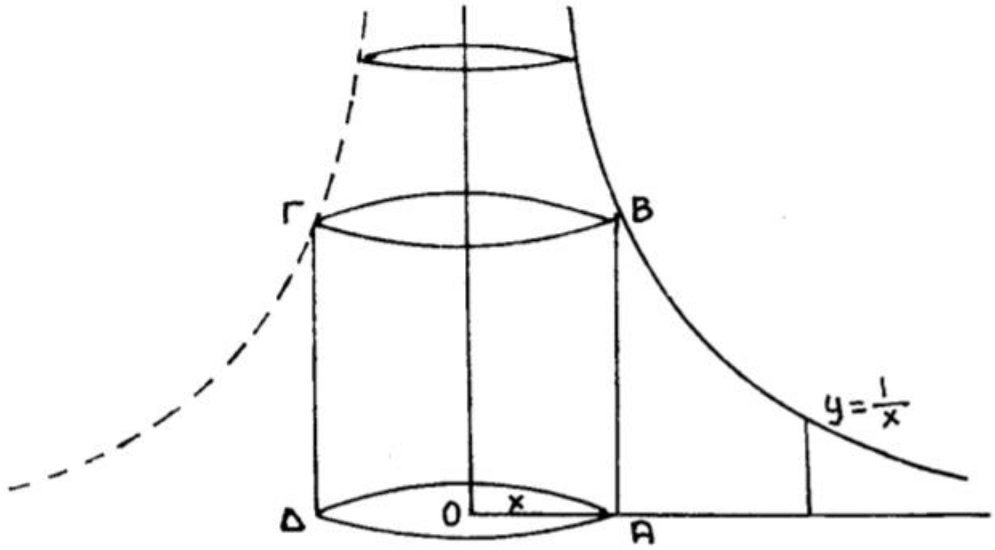
Θα αφήσουμε ασχολίαστο τον τόμο Α μια και περιέχει κλασσικά Μαθηματικά. Στον τόμο Β περιέχονται οι ιδέες του Αρχιμήδη (με την κλασσική τους όμως διατύπωση) που φυσικά χρησιμοποιούν ιδέες ολοκληρωτικού λογισμού, (2000 χρόνια πριν από την «ανακάλυψή» του), για τον υπολογισμό εμβαδού κύκλου, όγκου σφαίρας, κώνου, κυλίνδρου, εμβαδού επιφανείας σφαίρας κλπ. Και αυτά θα αφήσουμε ασχολίαστα, αφού το θέμα μας δεν είναι ο Αρχιμήδης. Αναφέρουμε μόνο ότι οι διατυπώσεις στα Θεοτόκεια κείμενα των θεωρημάτων του Αρχιμήδη (και του Απολλώνιου παρακάτω), είναι ακριβώς, μέχρι και του τελευταίου κόμματος, η ίδια με την διατύπωση των θεωρημάτων στην στερεότυπη έκδοση των Απάντων του Αρχιμήδη (και του Απολλώνιου).

Η πρώτη φορά που εμφανίζεται, στον τόμο Β (σελίς 196-197), θεώρημα που δεν ήταν γνωστό στην αρχαιότητα, είναι η ιδιότητα της ορθογώνιας υπερβολής να περικλείει άπειρο εμβαδόν μεταξύ του γραφήματός της και των ασυμπτώτων της. Την ιδιότητα αυτή την αποδίδει (σωστά) στον Ιησουΐτη Γρηγόριο. (Εννοεί τον Gregory του St. Vincent).[52] Την ιδιότητα της υπερβολής αυτής σύμφωνα με την οποία τα κατ' αποκοπήν εμβαδά είναι ίσα με logb-loga την αναφέρει με άλλη μορφή, στη σημείωση που ακολουθεί στα παραπάνω (σελίς 198). Λίγες σελίδες πιο κάτω, στη 206 και εξής, έχει τον ακριβή υπολογισμό του όγκου εκ περιστροφής της εν λόγω καμπύλης. Εδώ ο Θεοτόκης χρησιμοποιεί έμμεσα, χωρίς καν να δηλώνει ότι κάνει ολοκλήρωση, την λεγόμενη «μέθοδο των κελύφων»[53] για τον υπολογισμό του όγκου αυτού. Το βασικό τέχνασμα στην απόδειξη είναι ότι αυτός ο όγκος εκ περιστροφής ισούται με το άθροισμα των εμβαδών επιφανείας τυπικών κυλίνδρων όπως ο

[52] Καμμία σχέση με τον συνονόματό του, και διασημότερο James Gregory.

[53] Shell method.

ΑΒΓΔ. Η επιφάνεια όμως αυτών των κυλίνδρων, αν ΟΑ=χ, ΑΒ=ψ είναι 2πχψ, δηλαδή σταθερός αριθμός, αφού χψ=1.

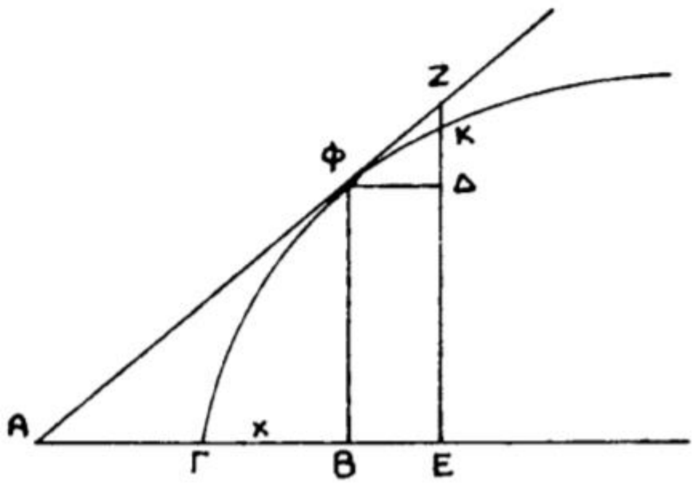


Σχήμα 2

Στη σημείωση που ακολουθεί την απόδειξη γράφει (σελίς 208), «Όντως θαυμαστόν τούτο της Υπερβολής το ιδίωμα», αφού άπειρη επιφάνεια έχει πεπερασμένο όγκο. Και συνεχίζει «και άλλας, δια του καλουμένου της Ολοκληρίας Λογισμού, εύρον οι Γεωμέτραι καμπύλας, εν αις το μεταξύ αυτών τε και των Ασυμπτώτων περιεχόμενον επ' άπειρον περιεχόμενον χωρίον, ίσον εστί χωρίω πεπερασμένω και το εκ του τοιούτο απείρου στερεόν ίσον στερεώ πεπερασμένω …». Τόσο πολύ εντυπωσιάστηκε ο Θεοτόκης από αυτή την ιδιομορφία, που συνεχίζει με την μία και μόνη μεταφυσική παρέκβαση στο έργο αυτό: «καντεύθεν δε εξελέγχονται οι άπιστοι, οι εκ των θείων της πίστεως Μυστηρίων ολιγορούντες, δια το δοκείν εναντιούσθαι τω λόγω, δια τον υπέρ κατάληψιν αυτών λόγον. Ιδού γαρ ένια, ενάντια μεν δοκούντα τω λόγω, δια δε της απταίστου αποδεικνύμενα γεωμετρικής επιστήμης».

Ο τρίτος τόμος έχει «Υψηλοτέραν Γεωμετρίαν», δηλαδή Αναλυτική Γεωμετρία, την οποία ορίζει ως εξής: «Υψηλοτέραν ειώθασιν καλείν Γεωμετρίαν την περί των κώνου τομών και άλλων διαλαμβάνουσαν καμπύλων, περί ων ουδέν περιέχει η στοιχειώδης Γεωμετρία, και δι' ών διάφορα επιλύεται προβλήματα, δια των γεωμετρικών στοιχείων μηδαμινώς επιλυόμενα».[54]

Στον πρώτο τόμο της Υψηλοτέρας Γεωμετρίας αποδεικνύει διάφορες κλασσικές ιδιότητες των κωνικών (π.χ. το σταθερό του αθροίσματος των αποστάσεων των σημείων της ελλείψεως από τις εστίες). Στην παράγραφο 270 όμως έρχεται να μελετήσει τις εφαπτόμενες στις καμπύλες: «Περί της μεθόδου του ευθείαν εφαπτομένην άγειν από δοθέντος σημείου της οποιασούν καμπύλης, ης δέδοται η εξίσωσις». Σε αυτό το σημείο χρειάζεται, φυσικά, παραγώγους τις οποίες δεν έχει ακόμη ορίσει. Ο ορισμός έρχεται παρακάτω, στο κεφάλαιο του Απειροστικού Λογισμού. Οπότε αναγκάζεται να πει ότι του χρειάζεται (ακόμη και τον ορισμό) μέσα στην απόδειξη του τύπου. Ας ακολουθήσουμε την φρασεολογία του, ιδίως στο σημείο που (με τη σημερινή ορολογία) χρειάζονται όρια.



Σχήμα 3

«…ειλήφθω το σημείον το Ζ έγγιστα του Φ…ουκούν δια την των σημείων Φ και Ζ καθ' υπεροχήν εγγύτητα της με ΦΔ της ίσης ΒΕ απειράκις μείζων η ΓΒ, της δε ΚΔ η ΒΦ η ίση τη ΕΔ. (Απειράκις μείζων και απειροπλάσιος λέγοντες, νοούμεν ότι η μεν ΒΕ της ΓΒ η δε ΚΔ της ΔΕ τοσούτον ελάσσων εστίν, ώστε ουδέν λογισθείσαι μηδεμιάν επιφέρει αύξησιν ή μείωσιν…Έστω δη ούν η μεν ΓΒ=χ, η δε ΒΕ, απειροστημόριον ούσα της ΓΒ, εμφαινέσθω δια του δχ. Ομοίως έστω η μεν ΦΒ=ψ, η δε ΚΔ=ψ. Επεί δε η ΖΔ απειροπλάσιος της ΖΚ, αλογουμένης άρα της ΖΚ, απροσπταίστως αντί της ΖΔ, την ΚΔ εκλαβείν έξεστιν[55]. ουκούν έσται ως ΚΔ:ΔΦ = ΦΒ:ΒΑ, είτουν ως δψ:δχ=ψ:ΒΑ άρα ΒΑ=

[54] *Στοιχεία Μαθηματικών*, σελ. 126 του Γ τόμου.

[55] Εδώ ουσιαστικά έγινε το πέρασμα στο όριο. Πιο κάτω χρησιμοποιεί εκφράσεις της μορφής «και των δια την σμικρότητα μη λογιζομένων…», οπότε παίρνει, ουσιαστικά, όρια.

ψ. δχ/δψ. Επεί δε η ΒΑ η υφαπτομένη εστί της καμπύλης, δήλον ότι η ψ.δχ/δψ, η ζητουμένη έκθεσις εστί».

Τα παραπάνω χρησιμοποιεί για τις κλασσικές καμπύλες.

Το δεύτερο μέρος του Γ' τόμου μελετά την «καλουμένην των Απείρων Μεθόδου». Δίνει τον ορισμό του Διαφορικού ή Απειροστημορίου ή Απειροστού σαν «…μεγέθους μέρος τι ελάχιστον, όπερ τω όλω προστιθέμενον ή αφαιρούμενον, ουδεμία αυτώ αισθητήν αύξησιν επιφέρει ή μείωσιν…».

Για να γίνει κατανοητός ο ορισμός, παρομοιάζει το μέγεθος με ένα βουνό, στο οποίο φύσηξε άνεμος και πήγε στην κορυφή του λίγη σκόνη. Η αύξηση του ύψους του βουνού είναι ανεπαίσθητη…Αφήνουμε ασχολίαστο τον χαριτωμένο αυτόν παραλληλισμό.

Στον Διαφορικό του Λογισμό ορίζει δεύτερη, Τρίτη κλπ. παράγωγο, συμβολικά $δ^2χ$, $δ^3χ$, σαν «απειροστόν του απειροστού» και ούτω καθ' εξής. Επίσης για το ολοκλήρωμα λέει «$δ^{-1}χ$ δηλώνει το ολόκληρον των $δ^oχ$ το γαρ $δ^oχ$ πεπερασμένον ον, απειροστόν εστί του απείρου $δ^{-1}χ$», και Ολοκληρωτικός Λογισμός είναι «η μέθοδος του ευρίσκειν των δοθέντων απειροστών τα ολόκληρα».

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο Θεοτόκης έχει όλο τον μηχανισμό του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού, μόνο που οι συμβολισμοί του δεν είναι όπως οι σύγχρονοι. Όμως ήταν, πάνω κάτω οι σύγχρονοι της εποχής του, μιας εποχής πριν τους Cauchy και Weirstrass που έδωσαν τη σημερινή μορφή σ' αυτά τα θέματα. Το βιβλίο του μελετά (με τη σημερινή ορολογία), παραγώγους αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου συναρτήσεων, μέγιστα-ελάχιστα, σημεία καμπής και βρίσκει ολοκληρώματα διάφορων συναρτήσεων (η πιο δύσκολη από τις οποίες είναι η $1/\sqrt{\alpha^2 - x^2}$).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ: Τα βιβλία του Θεοτόκη ήταν σύγχρονα και αρκετά δύσκολα για την εποχή τους, στην τουρκοκρατούμενη Ελλάδα. Η ύλη παρουσιάζεται με όσο γίνεται πιο εύληπτο τρόπο και προλείαναν το έδαφος για το βιβλίο του Κούμα, *Σειρά στοιχειώδους των Μαθηματικών και Φυσικών πραγματειών*, που τυπώθηκε το 1807 και το οποίο ήταν ιδιαίτερα σύγχρονο στις αρχές του 19^{ου} αιώνα.

Μιχάλης Λάμπρου

Μαθηματικό Τμήμα Πανεπιστημίου Κρήτης