Μία προσπάθεια διπλασιασμού του κύβου την εποχή της Τουρκοκρατίας και το κείμενο της Αντιπελάργησης

Μιχ. Λάμπρου

<u>Οι καταβολές</u>. Από τις καταβολές της η γεωμετρία στην αρχαία Αίγυπτο και Μεσοποταμία είχε ως μία από τις ασχολίες της την μέτρηση του εμβαδού διαφόρων σχημάτων: Η γεωμετρία, λέει ο Πρόκλος[1],

«…εκ της των *χωρίων αναμετρήσεως λαβούσα την γένεσιν…»*

Η εύρεση του εμβαδού σημαίνει, βέβαια, την σύγκριση ενός χωρίου με την τετραγωνική μονάδα.

Στις αρχαίες Ινδίες, άλλωστε, στα ιεροτελεστικά κείμενα των *Sulvasutra* της Βεδικής περιόδου, δίνονται πρακτικοί κανόνες για κατασκευή βωμών με συγκεκριμένες γεωμετρικές ιδιότητες. Ένα από τα προβλήματα π.χ. που λύνονται στις *Sulvasutra* είναι η κατασκευή πλακόστρωτου τετράγωνου βωμού ισεμβαδικού με άλλο ορθογωνίου σχήματος ή ισεμβαδικού με το άθροισμα δύο άλλων τετράγωνων βωμών[2] .

Όταν οι πρακτικές γεωμετρικές γνώσεις από το λίκνο του πολιτισμού έφθασαν στον αρχαίο ελληνικό χώρο, έγινε μετάβαση της Γεωμετρίας

«…από αισθήσεως εις λογισμόν και από τούτου επί νουν…» [3]

Έτσι είχαμε την εξέλιξή της σε αφηρημένη και αξιωματικά θεμελιωμένη επιστήμη, η οποία έφθασε στο αποκορύφωμά της με την έκδοση των *Στοιχείων* του Ευκλείδη.

Όπως ήταν φυσικό, η συστηματική ενασχόληση της γεωμετρίας άρχισε με την μελέτη απλών σχημάτων, όπως είναι τα ευθύγραμμα ή ο κύκλος. Υπήρχε εξ άλλου στους πρώτους Έλληνες φιλοσόφους η πεποίθηση ότι η ευθεία και ο κύκλος ήταν τα δύο τελειότερα γεωμετρικά σχήματα [4].

Η προσκόλληση στα δύο κατ' εξοχήν γεωμετρικά σχήματα ήταν βαθιά ριζωμένη. Ο ίδιος ο Πλάτωνας είχε προτείνει μόνο την ευθεία και τον κύκλο ως τα κύρια γεωμετρικά σχήματα, ακόμη και για τη μελέτη της αστρονομίας. Για την εξήγηση των κινήσεων των πλανητών, ιδίως μετά την παρατήρηση των ανωμαλιών

---

[1] Πρόκλου, «*Σχόλια στο α' των Στοιχείων*». Παρόμοια άποψη προβάλλουν διάφοροι αρχαίοι συγγραφείς όπως ο Ηρόδοτος (*Ιστορίαι,* β' 109), ο Ήρων (*Γεωμετρικά*, β'), ο Στράβων (*Γεωγραφικά*, κζ') και άλλοι.

[2] Υπάρχουν διάφορες μεταφράσεις των *Sulvasutra* σε Ευρωπαϊκές γλώσσες, βλέπε όμως και G. Thibaut, «*Mathematics in the making in ancient India*» ή σε ανάλογες Ιστορίες.

[3] Πρόκλος, ενθ. αναφ.

[4] Υπάρχουν πολλά χωρία των Προσωκρατικών με τέτοιες απόψεις. Χαρακτηριστικό είναι του Πυθαγόρα ότι ο κύκλος είναι «κάλλιστον σχήμα».

στην τροχιά του Ερμή και της Αφροδίτης, ο μεγάλος φιλόσοφος απαιτούσε το «σώζειν τα φαινόμενα» με ερμηνείες που βασίζονται μόνο σε αυτά τα σχήματα.

Όσο για την εύρεση εμβαδών ή όγκων, οι αρχαίοι Έλληνες ξέφυγαν από την πρακτική των προγενέστερων εμπειρικών γεωμετρών να εκφράζουν το αποτέλεσμα με αριθμητική, συχνά προσεγγιστική, τιμή. Η ακρίβεια αξίωνε την σύγκριση με άλλα γεωμετρικά σχήματα, απλούστερα, αποφεύγοντας μάλιστα τους τύπους. Παραδείγματος χάριν, ο Αρχιμήδης εξέφρασε το εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας ως «τέσσερις μέγιστοι κύκλοι της» και όχι $4\pi r^2$. Ανάλογα, το εμβαδόν έλικας το έγραφε ως «το 1/3 του κύκλου που την περικλείει» και όχι $4\pi^3/3$ που θα γράφαμε σήμερα[5].

Φυσικό επακόλουθο της ενασχόλησης των αρχαίων γεωμετρών ήταν, δοθέντος ενός σχήματος, να προσδιορισθεί άλλο απλούστερο με το ίδιο εμβαδόν ή όγκο και, αν ήταν δυνατόν, να βρεθεί το αντίστοιχο τετράγωνο ή κύβος. Παραδείγματος χάριν, ο τετραγωνισμός μηνίσκων από τον Ιπποκράτη και παραβολής από τον Αρχιμήδη είναι περιπτώσεις τέτοιων προβλημάτων που λύθηκαν επιτυχώς από τους αρχαίους γεωμέτρες.

Κατασκευές με κανόνα και διαβήτη. Ο Ευκλείδης ήταν μαθητής της σχολής του Πλάτωνα και επηρεάστηκε βαθύτατα από αυτόν: «*…τη προαιρέσει δε Πλατωνικός… και τη φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οικείος…*», λέει μεταξύ άλλων ο Πρόκλος[6].

Στα περίφημα *Στοιχεία*, οι μόνες γεωμετρικές κατασκευές που επιτρέπονται ρητά είναι αυτές που χρησιμοποιούν (μόνο) κανόνα και διαβήτη. Η προϋπόθεση αυτή είναι καταγραμμένη στα αξιώματα των *Στοιχείων*, που προδιαγράφουν[7]

-Ἠιτήσθω από παντός σημείου επί παν σημείον ευθείαν γραμμήν αγαγείν.

-Και παντί κέντρῳ και διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

Με άλλα λόγια επιτρέπεται η χρήση κανόνα και διαβήτη. Από εκεί και πέρα όμως οι κατασκευές θα χρησιμοποιούν αυτά και μόνον αυτά τα όργανα.

Ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* λύνει διάφορα προβλήματα κατασκευών, με κανόνα και διαβήτη. Παραδείγματος χάριν στο β'βιβλίο, πρότασις 14, ζητείται

«*Τῳ δοθέντι ευθυγράμμῳ ίσον τετράγωνον συστήσασθαι*»

Ενώ στο στ' βιβλίο, πρότασις 25, έχει την περίφημη κατασκευή ευθύγραμμου σχήματος ίσου προς δοθέν και όμοιου προς άλλο ευθύγραμμο. Το τελευταίο αυτό αποδίδεται στον Πυθαγόρα που, κατά τον Πλούταρχο, ήταν «*γεωμετρικώτατον*» και

---

[5] Αρχιμήδους, «*Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου*» και « *Περί Ελίκων*» αντίστοιχα.

[6] Πρόκλος, ενθ. ανωτ.

[7] Ευκλείδου «*Στοιχεία*», βιβλίο α', αιτήματα α' και γ'.

συγκριτικά «*γλαφυρώτερον και μουσικώτερον*» ακόμη και από το περικλεές θεώρημα της υποτείνουσας. Τόσο ικανοποιήθηκε ο Πυθαγόρας για το επίτευγμα του αυτό, ώστε «*ήγετο βουθυσίην*», δηλαδή προσέφερε θυσία ένα βόδι[8].

Το πρόβλημα της κατασκευής τετραγώνου διπλάσιου εμβαδού από δοθέν είναι βέβαια ειδική περίπτωση του τελευταίου, αλλά και πολύ απλό και γνωστό πρόβλημα. Ο Σωκράτης λόγου χάριν, στον «Μένωνα ή Περί Αρετής ερειστικόν διάλογον» του Πλάτωνα, όταν αναπτύσσει τα επιχειρήματά του για τη θεωρία του της ανάμνησης εκμαιεύει αυτήν ακριβώς την κατασκευή από τον αμόρφωτο παίδα.

Με δεδομένα όλα τα ανωτέρω, ένα άμεσο και φυσικό ερώτημα των γεωμετρών ήταν το ίδιο ερώτημα στις τρεις διαστάσεις. Αν δηλαδή γίνεται, με κανόνα και διαβήτη, η κατασκευή πλευράς κύβου με διπλάσιο όγκο από δοθέντα.

Τα περίφημα άλυτα προβλήματα. Οι αρχαίοι γεωμέτρες κατέληξαν σε τρία κατ' εξοχήν προβλήματα κατασκευών, τα οποία επεκράτησε στη βιβλιογραφία να ονομάζονται ***τα περίφημα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας.*** Πρόκειται για τον Διπλασιασμό του κύβου, τον Τετραγωνισμό του κύκλου και την Τριχοτόμηση της γωνίας. Και τα τρία ήταν φυσικές συνέπειες των γεωμετρικών γνώσεων και ερωτημάτων της εποχής. Για τον τετραγωνισμό λόγου χάριν, μετά την κατασκευή παραλληλογράμμου ισεμβαδικού με ευθύγραμμο σχήμα και υπό κάποιες άλλες συνθήκες (*Στοιχεία* α', 45) γράφει ο Πρόκλος ότι είναι «*ζητήσεως άξιον*» μήπως «*και τα ευθύγραμμα τοις περιφερογράμμοις ίσα δεικνύναι δυνατόν*»[9]. Όμοια, η τριχοτόμηση της γωνίας είναι το αμέσως επόμενο ζήτημα για μελέτη μετά την επιτυχή διχοτόμηση.

Στα περίφημα άλυτα προβλήματα, οι γεωμέτρες ανά τους αιώνες ενδιέτριψαν με ιδιαίτερη επιμέλεια. Ακόμα και φυλακισμένος ο Αναξαγόρας προσπαθούσε να λύσει το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, αφού, όπως μαρτυρούν οι πηγές, «*ανθρώπου ουδείς αφαιρείται τόπος ευδαιμονίαν…εν τῳ δεσμωτηρίῳ, τον του κύκλου τετραγωνισμόν έγραφε*»[10]. Το όνομα άλλωστε του λύτη θα έμενε ανεξίτηλα χαραγμένο στην Ιστορία των Μαθηματικών από ευεργεσία της μητέρας των εννέα Μουσών Μνημοσύνης, και όχι της Λήθης, θυγατέρας της Έριδος, που προσωποποιούσε την αγνωμοσύν.

Δυστυχώς όλες οι προσπάθειες να αντιμετωπισθούν, με κανόνα και διαβήτη, τα περίφημα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας κατέληξαν σε αποτυχία. Η αιτία της κακοδαιμονίας έγινε κατανοητή μόνο με σύγχρονα μαθηματικά, όταν αποδείχθηκε ότι τα προβλήματα **δεν** λύνονται μόνο με τα δύο αυτά όργανα. Δεν είναι εδώ ο κατάλληλος τόπος για περισσότερες εξηγήσεις, αλλά μπορεί να ανατρέξει κανείς στα βιβλία Θεωρίας Galois, που περιέχουν συνήθως την απόδειξη

---

[8] Πλουτάρχου, «*Συμποσιακών προβλημάτων*» και «*Ότι ουδ΄…κατ΄Επίκουρον*».

[9] Πρόκλος, ενθ. ανωτ.

[10] Πλουτάρχου, «*Περί φυγής*».

του αδυνάτου. Ας αναφέρουμε μόνο ότι για τον διπλασιασμό του κύβου, που μας απασχολεί εδώ, η απόδειξη του ανέφικτου δόθηκε το 1829 από τον A. F. Möbius[11].

Αυτό που προκαλεί εντύπωση είναι το γεγονός ότι η βαθιά γεωμετρική διαίσθηση των αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών τους είχε ενσταλάξει την πεποίθηση ότι όντως τα περίφημα άλυτα προβλήματα **δεν** λύνονται μόνο με κανόνα και διαβήτη. Ο Πάππος είναι απερίφραστος σε αυτό το θέμα. «*Τρία γένη είναι*» λέει «*των εν γεωμετρία προβλημάτων, και τα μεν αυτών επίπεδα καλείσθαι, τα δε στερεά, τα δε γραμμικά*» και εξηγεί ότι τα επίπεδα είναι εκείνα που «*δι' ευθείας και κύκλου δυνάμενα λύεσθαι*». Αντίθετα, εκείνα που χρειάζονται κωνικές τομές λέγονται στερεά, ενώ εκείνα που χρειάζονται ακόμα πιο πολύπλοκες γραμμές, όπως η τετραγωνίζουσα, η κοχλοειδής ή η κισσοειδής, λέγονται γραμμικά. Εξηγεί ακόμη ότι «*οι παλαιοί γεωμέτραι*» όταν θέλησαν να λύσουν το πρόβλημα της τριχοτόμησης με κανόνα και διαβήτη «*ηπόρησαν*», δηλαδή δεν τα κατάφεραν, γιατί δεν κατάλαβαν ότι το πρόβλημα δεν ήταν επίπεδο. Όσο για τον Διπλασιασμό του κύβου αναφέρει ειρωνικότατα ότι «*μέγας τις γεωμέτρης …όρισεν αμαθώς*» όταν «*έφασκεν ειδέναι δι' **επιπέδου** θεωρίας*» την λύση. Συνεχίζει τότε ο Πάππος λέγοντας για τον ανώνυμο «*προσποιούμενο*» αυτόν γεωμέτρη ότι είχε το θράσος να αξιώνει να του πει ο ίδιος την γνώμη του για την «*κατασκευή*»! Σ' αυτό το σημείο του έργου του ο Πάππος παραθέτει αρκετές λύσεις με γραμμές, διαφόρων γεωμετρών, τόσο για τα δύο αυτά προβλήματα όσο και για το τρίτο[12].

Αξίζει εδώ να προστεθεί και μία περικοπή του Ιωάννου Φιλοπόνου, ο οποίος θεωρεί τόσο δεδομένο ότι δύο κύβοι δεν γίνονται ένας με κανόνα και διαβήτη, αλλά απαιτείται στερεά καμπύλη, ώστε χρησιμοποιεί αυτή τη «γνώση» για να στηρίξει ένα φιλοσοφικό του επιχείρημα. Όπως λέει το σχετικό χωρίο:

«*…ουδέ οι δύο κύβοι κύβος γεωμετρίας έστιν αποδείξαι, στερεομετρίας δε μάλλον. Γεωμετρία μεν γαρ περί τα επίπεδα έχει, στερεομετρία δε περί τα στερεά… τους δύο κύβους ένα ποιήσαι…την πολυθρύλητον ιστορίαν…Δηλίοις λοιμώξασιν…*»[13].

<u>Το Δήλιον πρόβλημα</u>. Το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου φέρεται με δύο ακόμα ονόματα. Πρώτον λέγεται και *Δήλιον πρόβλημα*. Η ονομασία προέρχεται από έναν θρύλο που έλεγε ότι όταν στην αρχαία Δήλο είχε πέσει λοιμός, ένας χρησμός βεβαίωνε ότι θα απαλλαγούν από την συμφορά αν κατασκευάσουν βωμό διπλάσιο του υπάρχοντος. Όταν όμως προσέφυγαν στον Πλάτωνα για να ερμηνεύσει τον χρησμό, ο φιλόσοφος αποκρίθηκε ότι ο θεός δεν ζητούσε διπλάσιο

[11] Ο A. F. Möbius (1790-1860) αυτός, είναι ο γνωστός μας με την ομώνυμη μονόπλευρη ταινία. Το σχετικό του άρθρο είναι στο *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* 1829, το περίφημο περιοδικό που εξέδιδε ο Crelle.

[12] Πάππου, «*Συναγωγή*», βιβλία γ'και δ'.

[13] Ιωάννου του Φιλοπόνου, «*Σχόλια στα Αναλυτικά Ύστερα του Αριστοτέλους*».

βωμό αλλά ονείδιζε τους Έλληνες επειδή αμελούσαν την γεωμετρία[14]. Δεν θα μπούμε στις λεπτομέρειες του απόηχου αυτού των προβλημάτων στις *Sulvasutra*, γιατί είναι ευρέως γνωστές και υπάρχουν στις παραπομπές που παραθέτουμε.

Το δεύτερο πρόσθετο όνομα του ίδιου προβλήματος είναι *πρόβλημα παρεμβολής δύο μέσων αναλόγων.* Η αιτία είναι η εξής: Ο Ιπποκράτης ο Χίος, όπως μας λέει ο Ευτόκιος και πολλοί άλλοι αρχαίοι συγγραφείς, «*επενόησεν ότι, εάν ευρεθῆ δύο ευθειών γραμμών, ών η μείζων της ελάσσονός έστι διπλασία, δύο μέσας ανάλογον λαβείν εν συνεχεί αναλογία, διπλασιασθήσεται ο κύβος»*[15]. Με άλλα λόγια είχε αναγάγει το αρχικό πρόβλημα στην παρεμβολή x και y μεταξύ δύο δοθεισών a και b, όπου b=2a. Δηλαδή ζητούσε να ισχύει a/x = x/y = y/b. Πραγματικά, εύκολα φαίνεται ότι τότε ισχύει $x^3= 2a^3$, δηλαδή ότι το x λύνει το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου.

Οι αρχαίου Έλληνες δεν κατάφεραν βέβαια να διπλασιάσουν τον κύβο με κανόνα και διαβήτη. Επινόησαν όμως πάμπολλες κατασκευές με άλλες καμπύλες, όπως ο Νικομήδης με την κογχοειδή του, ο Διοκλής με την κισσοειδή κ.τ.λ. Επίσης επινόησαν μηχανικά όργανα, διαφορετικά εννοείται από τον διαβήτη, για τον ίδιο σκοπό: ο Ερατοσθένης τον μεσολάβο, ο Πλάτωνας ένα όργανο που το περιγράφει κ.τ.λ.[16]. Εκτός από τους αρχαίους Έλληνες και οι μεταγενέστεροι μαθηματικοί επινόησαν ευφυέστατες κατασκευές με καμπύλες ή όργανα. Από τον ανεξάντλητο κατάλογο μνημονεύουμε π.χ. τους ΄Αραβες Abu-Bakr al-Harawi, Abu Sahl al-Quhl και Abu Jafar, επίσης τους Vieta (1540-1603), Descartes (1596-1650), Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), Huygens (1629-1695), Νεύτωνα (1642-1727) και τον Longchamps (1842-1906)[17].

Είναι ενδιαφέρον ότι, πριν από την απόδειξη του αδυνάτου, και οι σύγχρονοι μαθηματικοί, όπως οι αρχαίοι, είχαν διάχυτη την άποψη ότι τα περίφημα άλυτα προβλήματα δεν λύνονται επιπεδικώς, με κανόνα και διαβήτη. Αλλά και μετά την απόδειξη, το πρόβλημα δεν σταμάτησε να έλκει «λύτες» με αμείωτο ρυθμό. Δυστυχώς στην συντριπτική τους πλειοψηφία πρόκειται για ευφάνταστα άτομα ή, ακόμα δυστυχέστερα, διανοητικά σαλευμένα. Συνήθως η «λύση» που προτείνουν είναι το άκρον άωτον της σύγχυσης και δείχνει ότι οι λύτες δεν έχουν καν

---

[14] Την ιστορία αυτή την σώζουν, με μικροδιαφορές, ο Θέων ο Σμυρναίος και ο Πλούταρχος. Περίπου την ίδια ιστορία, αλλά με τον βασιλέα Μίνω, παραθέτει ο Ευτόκιος.

[15] Ευτοκίου, «*Σχόλια στο Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου του Αρχιμήδους*». Το ίδιο γράφουν και πολλοί άλλοι συγγραφείς.

[16] Οι δύο κύριες πηγές που περιέχουν πολλές τέτοιες κατασκευές , με καμπύλες ή μηχανικές, είναι ο Πάππος στην *Συναγωγή* και ο Ευτόκιος στα *Σχόλια στον Αρχιμήδη*.

[17] Τις κατασκευές των τριών Αράβων μπορεί να τις βρει κανείς στο W. Knorr, «*Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*» (εκδ. Birkhauser 1989). Οι κατασκευές μερικών αρχαίων μεθόδων καθώς και μερικών μεταγενέστερων βρίσκονται στο βιβλίο του Μ. Α. Μπρίκα, «*Τα περίφημα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας»*. Οι υπόλοιπες υπάρχουν στο βιβλίο του W.W. Rouse Ball, «*Mathematical Recreations and Essays*» (επαυξημένη από τον H.S.M. Coxeter, εκδ. MacMillan 1962).

κατανοήσει το αρχικό πρόβλημα. Στην καλύτερη περίπτωση η «λύση» είναι κάποια, καλή ή κακή, κατά προσέγγιση κατασκευή.

Όλα τα Μαθηματικά Τμήματα του κόσμου, οι Μαθηματικές Εταιρίες και οι Ακαδημίες έχουν υποστεί κατά καιρούς την επίσκεψη ή αλληλογραφία επίδοξων λυτών για το ένα ή το άλλο από τα αρχαία προβλήματα ή για άλλα προβλήματα που έχουν μαγνητίσει μαθηματικούς και «μαθηματικούς»: το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat, η Θεωρία της Σχετικότητας, το Αεικίνητο και τόσα άλλα είναι στην ημερησία διάταξη. Η ψυχολογία τέτοιων ατόμων είναι ενδιαφέρον θέμα για συζήτηση, και αναλύεται με υπέροχο τρόπο, καυστικό αλλά και με πολύ χιούμορ, στο βιβλίο του De Morgan, *A Budget of Paradoxes,* του 1872. Τίποτα δεν άλλαξε από τότε.

Για να προστατεύσει τα μέλη της η Ακαδημία των Παρισίων, ήδη από το 1775, μισό αιώνα πριν από την απόδειξη του αδυνάτου, έβγαλε την απόφαση να μην δεχθεί άλλες προτεινόμενες λύσεις των παραπάνω προβλημάτων. Ο τότε μόνιμος γραμματέας της Ακαδημίας, ο πολύς Condorcet, αξιόλογος μαθηματικός ο ίδιος, έγραψε ένα κείμενο για να ερμηνεύσει μια φαινομενικά τόσο αντιακαδημαϊκή απόφαση. Το κακό είχε παραγίνει και τα μέλη της Ακαδημίας έχαναν πολύ χρόνο σε άκαρπες συζητήσεις.

Την εποχή της Τουρκοκρατίας, που μας ενδιαφέρει εδώ, και τα τρία περίφημα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας εφείλκυσαν (πριν από την απόδειξη του αδυνάτου) την προσοχή των επιδόξων λυτών:

Το Δήλιο πρόβλημα και την δημοσιευθείσα το 1756 μέθοδο του Μπαλάνου Βασιλόπουλου, τα εξετάζουμε διεξοδικά σε ό,τι ακολουθεί, οπότε ας δούμε πρώτα τις λιγοστές πληροφορίες που έχουμε για τα άλλα δύο προβλήματα.

Το 1774 ο Κωνσταντίνος Τζεχάνης (αγνώστου ημερομηνίας γεννήσεως ή θανάτου), «*ακροατής πολυμαθεστάτων και Μαθηματικωτάτων ανδρών στην Άλλη (Halle της Σαξωνίας*)» και συγγραφέας μαθηματικού βιβλίου, ανήγγειλε μέθοδο τετραγωνισμού του κύκλου. Την πληροφορία μας την παρέχει ο Ζαβίρας (1744 – 1804) στο αξιόλογο έργο του βιογραφιών, «*Νέα Ελλάς ή Ελληνικόν Θέατρον*». Συγκεκριμένα, μεταξύ των χειρόγραφων καταλοίπων του Τζεχάνη αναφέρει και το «*Προγύμνασμα Γεωμετρικόν, ήτοι νέα θεωρία του του κύκλου τετραγωνισμού, όνπερ των δυνατών είναι, τρόπῳ, άχρι του νυν ανηκούστῳ δείξε επειράσατο ο εν σπουδαίοις ελάχιστος Κ.Χ.Γ. Τζεχάνη ο εκ της των Μακεδόνων Μοσχοπόλεως. 1774 Ιανουαρίου 24*»[18].

[18] Γ.Ι. Ζαβίρα, «*Νέα Ελλάς ή Ελληνικόν Θέατρον*», που εκδόθηκε το 1872, πολλά χρόνια μετά τον θάνατο του συγγραφέα και μετά από πολλές περιπέτειες. Υπάρχει επίσης και η επιμελημένη από τον Τάσο Γριτσόπουλο έκτακτη ανατύπωσή του το 1972 (Εταιρεία Μακεδονικών Σπουδών). Τις πληροφορίες του Ζαβίρα για τον Τζεχάνη τις επαναλαμβάνει σχεδόν αυτολεξεί ο Κ. Σάθας στο «*Βιογραφίαι των εν τοις γράμμασι διαλαμψάντων Ελλήνων*» (Αθήνα 1868). (Το δεύτερο, αν και τυπώθηκε πρώτο, στηρίχθηκε στο κείμενο του Ζαβίρα που ήταν τότε ακόμα σε μορφή χειρογράφου).

Το χειρόγραφο του Τζεχάνη, ο οποίος τότε ζούσε στη Χάλλη αλλά έκτοτε μετακόμισε στην Βιέννη, στην Κωνσταντινούπολη, στην Βλαχία και στην Λεχία, δεν έχει βρεθεί και είναι μάλλον απίθανο να βρεθεί.

Μία απόπειρα τριχοτόμησης της γωνίας ήταν πόνημα, ατελέσφορο βέβαια, του Στέφανου Δούγκα (ή Δούνκα) (; - 1830). Για τον αξιόλογο αυτόν λόγιο, που συνέγραψε τα πρωτοποριακά για τα τότε ελληνικά δεδομένα «*Στοιχεία Αριθμητικής και Αλγέβρης, εκδοθέντα υπό Στεφάνου Ιεροδιακόνου του Θετταλού*» (Βιέννη 1816), υπάρχει η εξής πολύκροτη είδηση στον περίφημο *Λόγιο Ερμή* της 15ης Αυγούστου του 1812: «*Εφεύρεσις. Στέφανος Δούκας ο εκ Θεσσαλίας, ανήρ πεπαιδευμένος λίαν κατά τε την φιλοσοφίαν και τας επιστήμας και μάλιστα κατά την Μαθηματικήν και τα φυσικά,…, εφεύρε νυν την Τριχοτομίαν της γωνίας γραμμικώς δια της κοινής Μαθηματικής, εν ῳ υπό των προ αυτού ευρέθη μόνον δια των Καμπύλων και των Ημιτόνων, ήτις και δυσκολωτάτη εν τῃ πραγματείᾳ υπήρχεν…Ταύτης την δείξιν και την χρήσιν, θέλομεν κοινώσει μετ'ολίγου εις τους εραστάς της Μαθηματικής*»[19].

Τα επόμενα τεύχη του Λογίου Ερμού, ο οποίος εξεδίδετο μέχρι το 1814 και, μετά την προσωρινή του διακοπή, από το 1816 μέχρι το 1821, δεν έχουν την υποσχεθείσα ανακοίνωση της Τριχοτομίας του Δούγκα. Η αθέτηση αυτή θα μπορούσε βέβαια να ερμηνευτεί απλώς ως ολιγωρία. Θα μπορούσε όμως εξ ίσου να οφείλεται σε σκόπιμη αποσιώπηση, μετά την ανακάλυψη του μαθηματικού σφάλματος (που είχε αναπόδραστα εμφιλοχωρήσει) στην προτεινόμενη μέθοδο. ΄Ανθρακες ο θησαυρός.

Η Αντιπελάργησις. Το 1756 (πριν από την απόδειξη του αδυνάτου) ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος (; - 1760) δημοσίευσε στην Βενετία μία (εννοείται εσφαλμένη) κατασκευή του διπλασιασμού του κύβου με κανόνα και διαβήτη. Ο τίτλος του έργου ήταν

Μέθοδος Γεωμετρικώνς χωρούσα περί ευρέσεως των δύο

μέσων συνεχώς εξής ανάλογον γραμμών

Ούτε ο Ζαβίρας ούτε ο Σάθας αναφέρουν ρητά ότι το «*Προγύμνασμα*» έμεινε υπό μορφή χειρογράφου και δεν τυπώθηκε ποτέ, αλλά η άποψη αυτή πρέπει να θεωρηθεί ασφαλής.

[19] Πληροφορίες για τον βίο και το έργο του Δούγκα μπορεί να βρει κανείς στην εμπεριστατωμένη μελέτη του Γιάννη Καρά, «*Γερμανικές επιδράσεις στη σκέψη των χρόνων της νεοελληνικής αναγέννησης – Στέφανος Δούγκας ή Περί Φυσικής Φιλοσοφίας*» (Αθήνα 1993). Επίσης παραπέμπουμε στα άλλα βιβλία του Γ. Καρά για πλούσια πηγή πληροφοριών σχετικά με τις επιστήμες την εποχή της Τουρκοκρατίας. Συγκεκριμένα στα «*Φυσικές – Θετικές επιστήμες στον Έλληνικό 18ο αιώνα*» (εκδ. Gutenberg, 1977), «*Οι θετικές επιστήμες στον Ελληνικό χώρο, 15ος -19ος αιώνας*» (εκδ. Ζαχαρόπουλου, 1991) και «*Οι επιστήμες στην Τουρκοκρατία: χειρόγραφα και έντυπα*» (εκδ. Εστίας, 1992).

Το ολιγοσέλιδο αυτό έργο, γραμμένο στα Ελληνικά με παράλληλη λατινική μετάφραση, σώζεται, κατά τα φαινόμενα, μόνο σε ένα αντίτυπο στην βιβλιοθήκη της Ρουμανικής Ακαδημίας στο Βουκουρέστι[20].


ΜΕΘΟΔΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΣ

ΜΠΑΛΑΝΟΥ ΒΑΣΙΛΟΠΟΥΛΟΥ

ΚΥΡΙΟΥ ΠΑΓΣΙΟΥ

METHODUS GEOMETRICA

OPERA, ET STUDIO

BALANI BASILOPULI

ΕΝΕΤΙΗΣΙ. 1756.

ΑΝΤΙΠΕΛΑΡΓΗΣΙΣ

ΣΥΛΛΟΓΗ

ΜΠΑΛΑΝΟΥ ΒΑΣΙΛΟΠΟΥΛΟΥ

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗ ΤΗΣ ΑΥΣΤΡΙΑΣ.

---

[20] Το βιβλίο αυτό (που από εδώ και στο εξής θα το μνημονεύουμε ως *Μέθοδος*) **δεν** αναφέρεται σε κανέναν από τους κύριους βιβλιογραφικούς οδηγούς. Η ύπαρξή του διαφεύγει την προσοχή του Α. Παπαδόπουλου – Βρετού, «*Νεοελληνική φιλοσοφία ήτοι κατάλογος τυπωθέντων βιβλίων παρ' Ελλήνων*» (Αθήνα 1854), του E. Legrand στην περίφημη ενδεκάτομη «Bibliographie Hellénique» (Paris 1885), του Γ. Λαδά και Α. Χατζηδήμου, « *Προσθήκες, Διορθώσεις και Συμπληρώσεις στην Bibliographie Hellénique του E. Legrand*»(Αθήνα 1964), του Θ.Ι. Παπαδόπουλου, «*Ελληνική Βιβλιογραφία 1466 – 1800*» (Ακαδημία Αθηνών 1984), και άλλων. Από ό,τι φαίνεται το βιβλίο εκτός από ένα βραχύβιο ενδιαφέρον όταν πρωτοεκδόθηκε, έπεσε στην λήθη. Επανήλθε στο προσκήνιο το 1805, όταν βρέθηκε μία επιστολή του Ευγένιου Βούλγαρη (τα δραματικά περιστατικά εξετάζονται παρακάτω) που προκάλεσε την επανέκδοσή του το 1816 ως τμήμα της *Αντιπελάργησης*. Πέρα από αυτά, ο πρώτος που αναφέρει το βιβλίο, χωρίς όμως ιδιαίτερες λεπτομέρειες (δεν δίνει ούτε τον τίτλο), είναι ο Κούμας στο «*Ιστορίαι των ανθρωπίνων πράξεων*» (Βιέννη 1832) που γράφει μόνον «οι *μαθηταί του Βαλάνου…την εξέδωσαν* (την λύση του Δηλίου προβλήματος) *διά τον τύπων εις Βενετίαν (1756)*». Έκτοτε, και περί τα μέσα του περασμένου αιώνα, το βιβλίο αναφέρεται (άμεσα ή έμμεσα) κυρίως σε βιογραφίες των Μπαλάνων ή του Βούλγαρη. Τέτοια είναι τα κείμενα του Γ. Αινιάνος, «*Συλλογή ανεκδότων συγγραμμάτων Ευγενίου του Βουλγάρεως*» (Αθήνα 1837), του Π. Καλλιγά, «*Ευγένιος Βούλγαρις*» (περιοδικό *Πανδώρα*, τ. Α', σ. 494, Αθήνα 1851), του Κ. Ασωπίου, «*Ιστορία των Ελλήνων ποιητών και συγγραφέων*» (Αθήνα 1856), κ.λ.π. Η πρώτη πλήρης αναφορά της *Μεθόδου* σε βιβλιογραφικό κατάλογο, που έχουμε υπόψη, είναι στο βιβλίο του Γ. Καρά, «*Φυσικές – Θετικές επιστήμες στον Ελληνικό 18ο αιώνα*» (εκδ. Gutenberg, 1977) από όπου και η αναφορά του Α. Πούλου στο έργο του «*Ελληνική Μαθηματική βιβλιογραφία 1500 – 1900*)» (Αθήνα 1988).

Όπως ήταν επόμενο, η προτεινόμενη από τον Μπαλάνο Βασιλόπουλο κατασκευή ξεσήκωσε πολλές συζητήσεις. Οι συζητήσεις εξελίχθηκαν σε πικρές συγκρούσεις που, τουλάχιστον λεκτικά, ξέφυγαν από τα όρια της ευπρέπειας, με οπαδούς από την μια μεριά αλλά με περισσότερους και ισχυρούς πολέμιους από την άλλη. Στην διαμάχη ενεπλάκησαν με πρωτεύοντα ρόλο αξιόλογοι λόγιοι της εποχής της Τουρκοκρατίας, με καλές γνώσεις των Μαθηματικών. Κατά ετάχθησαν ο κλεινός Ευγένιος Βούλγαρης (1716 – 1806) και ο Νικηφόρος Θεοτόκης (1731 – 1800), υπέρ ήσαν οι μαθητές του Μπαλάνου Βασιλόπουλου, Γεώργιος Ζεπελαβίτης και ο μεταφραστής του Νεύτωνα, Νικόλαος Ζαρζούλης (; - 1722), ενώ ο Τρύφων εκ Μετσόβου τήρησε ίσες αποστάσεις[21].

Αν και εσφαλμένη η μέθοδος που προτείνεται, είναι εύκολο να υποσκελισθεί ο αναγνώστης που δεν καιροφυλακτεί, και αρκετοί πείστηκαν για την ορθότητά της. Αυτό συνέβη, διότι το σχήμα που συνοδεύει την απόδειξη είναι τόσο περίπλοκο, που χρειάζεται κανείς έναν μίτο της Αριάδνης για να μην χαθεί στον γεωμετρικό αυτό λαβύρινθο. Άλλωστε, όπως θα τεκμηριώσουμε παρακάτω, ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος ανασκεύασε μερικές φορές την μέθοδό του για να παρακάμψει τα λογικά κενά που του απεκάλυπταν οι οξυδερκέστεροι από τους επικριτές του. Έτσι, η δημοσιευμένη μέθοδός του δεν είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν που μελέτησαν οι ψέξαντες, αλλά μία παραλλαγή της. Ήταν ωστόσο σαν να αντλούσε από τον πίθο των Δαναΐδων, αφού το κενό δεν επιδέχεται γεφύρωση. Το μόνο που μπορούμε να συμπεράνουμε είναι ότι, τουλάχιστον, έχουμε μία κάποια αιτιολογία για την υπέρ το δέον μακρά διάρκεια της μαθηματικής διαμάχης που προέκυψε.

Ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος έγραψε σε πολλές Ακαδημίες ζητώντας την γνώμη τους για την μέθοδό του. Επιστολές του πήραν οι Ακαδημίες της Πετρούπολης, των Παρισίων, της Βρετανίας, της Ολλανδίας, του Βερολίνου, της Χάλλης στην Σαξωνία και της Βονωνίας (Bologna). Δεν θα πρέπει όμως να καταχωρήσουμε τον Μπαλάνο Βασιλόπουλο στον μακρύ κατάλογο των σαθρών «λυτών» που ταλαιπώρησαν χωρίς βάσιμο λόγο τις Ακαδημίες. Η μέθοδός του αξίζει μελέτης πριν απορριφθεί, ιδίως εάν την εξετάσουμε με τα δεδομένα της εποχής της.

Εκτός από τις Ακαδημίες, ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος έγραψε σε διάσημους μαθηματικούς, όπως στον Euler, αλλά και σε κάθε έναν από τους επιστήμονες στην Βενετία και στην Bologna, «*εκάστου των εκεί – εν Ουενετίαις – και εν Βονωνίαις επιστημόνων*». Ρώτησε, προφορικά ή γραπτά, μέσω Ζαρζούλη ή των άλλων ευρισκομένων τότε στην Ιταλία μαθητών του, έναν Ιησουΐτη μαθηματικό (το όνομά του δεν μας έγινε γνωστό), τον επίσης Ιησουΐτη «Πάδρε» Ρικάτη, καθηγητή των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Βονωνίας[22], τον αστρονόμο και επίσης

---

[21] Παραπέμπουμε στις κύριες πηγές, Ζαβίρα και Σάθα, ένθ' ανωτέρω, για σύντομα βιογραφικά στοιχεία των αναφερόμενων λογίων.

[22] Vincenzo Riccati (1705 – 1775), Ιησουΐτης μαθηματικός, γιος του επίσης διάσημου μαθηματικού της ομώνυμης διαφορικής εξίσωσης, Jacobo Riccati (1676 – 1754). Συγγραφέας μαζί με τον Girolamo Saladini του *Institutiones Analyticae* (1765), ενός από τα πρώτα βιβλία που έκαναν χρήση του

καθηγητή στο Πανεπιστήμιο της Βονωνίας, «Ευστάθιο Τζανώτη»[23], τον καθηγητή στο Πανεπιστήμιο του Παταβίου (Padova) «Αββάτε» Σούτζην[24] και τέλος, **την** φιλόσοφο.

Την περιβόητη αυτή φιλόσοφο δεν την κατονομάζουν τα σχετικά κείμενα, αλλά εξ όνυχος αναγνωρίζει κανείς τον λέοντα[25]: μπορούμε με ασφάλεια να ισχυριστούμε ότι πρόκειται για την Maria Gaetana Agnezi (1718 – 1799)[26].

Όλο το ιστορικό της διαμάχης, ένθεν και ένθεν, η αλληλογραφία με τις Ακαδημίες κ.τ.λ., συγκεντρώθηκαν από τον Κοσμά Μπαλάνο (1731 – 1808), γιο του λύτη, σε ένα υπέροχο κείμενο, την ***Αντιπελάργηση***[27].

Απειροστικού Λογισμού. Ο Vincenzo Riccati ήταν καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Bologna από το 1739. Εκεί τον συνάντησε ο Νικόλαος Ζαρζούλης το 1754 για να του ζητήσει τη γνώμη του για την λύση του Μπαλάνου Βασιλόπουλου. (Ο αναφερόμενος «Πάδρε Ρικάτης» της επιστολής της 8ης Απριλίου 1754 του Ζαρζούλη προς τον δάσκαλό του, είναι αναμφισβήτητα ο γιος Vincenzo και όχι ο πατέρας Jacobo. Ο πατέρας ήταν πολύ γέρος τότε, και απεβίωσε στις 15 Απριλίου 1754. Επίσης, σίγουρα δεν είναι ο άλλος γιος, Giordano, μαθηματικός και αυτός). Προσθέτουμε ότι τον Vincenzo (μεταγλωττισμένο ως Βικέντιο Ρικάτιο) τον αναφέρει και ο Κ. Κούμας, στον πρόλογο της «*Σειράς Στοιχειώδους των Μαθηματικών και Φυσικών πραγματειών*» του (Βιέννη 1807), για τη λύση των υψηλόβαθμων πολυωνυμικών εξισώσεων.

[23] Eustachio Zanotti (1709 – 1782), αξιόλογος Ιησουΐτης αστρονόμος από επιφανή οικογένεια της Bologna. Την εποχή της διαμάχης που μας απασχολεί εδώ, ο Zanotti δίδασκε στο Πανεπιστήμιο της Bologna και ήταν στις δόξες του: είχε ανακαλύψει διάφορους κομήτες, εξέδιδε την περίφημη αστρονομική του *Εφημερίδα* και είχε προσκληθεί από την Ακαδημία των Παρισίων για να λάβει μέρος σε μία διεθνή ερευνητική ομάδα με έργο την ακριβή μέτρηση της παράλλαξης της Σελήνης. Τα μαθηματικά του Zanotti ήταν από την σύγχρονη τότε σκοπιά: αρκεί να σημειωθεί ότι ο ίδιος είχε γράψει το τελευταίο τμήμα της «*Elementi della Geometria*» κατά παραγγελία του συγγραφέα της, του αξιόλογου αστρονόμου Eustachio Manfredi, «*υιοθετώντας ως σκοπιά την μέθοδο των απειροστών*». (Βλέπε π.χ. *Dictionary of Scientific Biography*, εκδ. Gillespie). Παρεπιπτόντως ας αναφέρουμε ότι ο ίδιος Zanotti ήταν καθηγητής του Νικηφόρου Θεοτόκη στην Bologna. Γράφει ο Θεοτόκης τα εξής στα «*Στοιχεία Φυσικής*» του (Λειψία 1766, τ. Α', σ. 264) «*…εν Βονωνία δι' εντελεχών τηλεσκοπίων εωρακότες, τας εκλείψεις αυτών κατωπτεύσαμεν, οδηγούντος του εκείσε περικλεούς* ***Ευσταθίου Ζανότου*****».**

[24] Δεν είμαστε σε θέση να εκφέρουμε αδιαφιλονίκητη άποψη για το ποιος είναι ο μνημονευθείς αββάς Σούτζης. Το πιθανότερο είναι να πρόκειται για τον Giuseppe Suzzi, μαθητή και αργότερα συνεργάτη του Jacobo Riccati (πατέρα του προαναφερθέντος Vincenzo). (Βλέπε π.χ. *Dictionary of Scientific Biography* στο λήμμα J. Riccati).

[25] Ο πρώτος που ταυτίζει **την** φιλόσοφο είναι ο Α. Πούλος στο αδημοσίευτο ακόμα άρθρο του, «*Διαπάλη αναλυτικού και συνθετικού πνεύματος στα μαθηματικά της Τουρκοκρατίας (η περίπτωσις της «Αντιπελάργησης»)*». Επίκειται η δημοσίευσή του στα «*Πρακτικά της δεύτερης ημερίδας του Ε.Ι.Ε. για τις επιστήμες την εποχή της Τουρκοκρατίας*», στην Αθήνα το 1992.

[26] Ιταλίδα μαθηματικός και φιλόσοφος. Μικρή ήταν παιδί θαύμα και είχε μάθει άπταιστα Ελληνικά και Λατινικά. Το 1750 διορίστηκε στο Πανεπιστήμιο της Bologna, όπου δίδασκε και ο πατέρας της. Το έργο της *Instituzioni analitiche ad uso della gionentu italiana* του 1748 ήταν πρωτοποριακό, με τεράστια επίδραση στην μαθηματική εκπαίδευση, και περιείχε πάρα πολύ σύγχρονα θέματα.

Παραπέμπουμε στην μελέτη «Maria Gaetana Agnesi» του C. Truesdell στο Arch. Hist. Exsct Sc. 40 (2) 1989, 113-142, για έγκυρη βιογραφία της Agnesi.

[27] Αντιπελάργησις σημαίνει η εξ ευγνωμοσύνης περίθαλψη, ιδίως των τέκνων προς τους γονείς τους. Το Βυζαντινό λεξικό του Σουΐδα (Σούδα), του δεκάτο αιώνα γράφει: «*Αντιπελαργείν, παροιμία επί των τας χάριτας αντιδιδόντων…οι γαρ πελαργοί δικαιοπραγείς όντες επί των πτερύγων βαστάζουσι τους γεγηρακότας*». Γίνεται τώρα φανερό γιατί ο Κοσμάς Μπαλάνος χρησιμοποίησε αυτόν τον ασυνήθιστο τίτλο.

Η *Αντιπελάργησις* δημοσιεύτηκε στη Βιέννη το 1816, μετά τον θάνατο του Κοσμά. Η έκδοση έγινε από άγνωστο άτομο, αλλά με βάση το προπαρασκευασμένο από τον Κοσμά χειρόγραφο[28]. Το κείμενο περιέχει, εκτός από τα προαναφερθέντα, και μια σταχυολόγηση διαφόρων αρχαίων μεθόδων αντιμετώπισης του προβλήματος διπλασιασμού του κύβου. Συγκεκριμένα, από τα «*Σχόλια στα Αναλυτικά Ύστερα του Αριστοτέλους*» του Ιωάννου Φιλοπόνου, παραθέτει αυτολεξεί το σχετικό χωρίο, όπου υπάρχει μέθοδος του Απολλωνίου. Κατόπιν, πάλι αυτολεξεί, έχει άλλες δώδεκα μεθόδους των αρχαίων παρμένες από το κείμενο του Ευτοκίου «*Σχόλια στο Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου του Αρχιμήδους*», το οποίο είναι μία από τις δύο κύριές μας αρχαίες πηγές με λύσεις (όχι βέβαια επιπεδικές) του Δηλίου προβλήματος. Τέλος παραθέτει από το ίδιο κείμενο του Ευτοκίου δύο λύσεις των αρχαίων, του Διονυσοδώρου και του Διοκλέους, ενός προβλήματος του Αρχιμήδη που ανάγεται σε κάποια άλλη, διαφορετική από την υπό εξέταση κυβική εξίσωση[29].

Τις παραπάνω αρχαίες μεθόδους ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος τις γνώριζε πολύ πριν από την δημοσίευση της *Μεθόδου* το 1756: Όταν ο ίδιος έγραψε το προοίμιο της περίφημης *Οδού Μαθηματικής* του Μεθοδίου Ανθρακίτη, που εκδόθηκε στην Βενετία το 1749[30], συμπεριέλαβε μία σύντομη αλλά περιεκτική και

Όπου, σε όλη την έκταση του παρόντος άρθρου, παραθέτουμε αναφορά εντός εισαγωγικών χωρίς να μνημονεύουμε την παραπομπή, θα εννοείται η *Αντιπελάργησις.*

[28] Γράφει χαρακτηριστικά ο Σάθας το 1868, ενθ. ανωτ., ότι «*είχεν δε και παρασκευάσει* (ο Κοσμάς Μπαλάνος) *προς έκδοσιν την μετά Ευγενίου του Βουλγάρεως μαθηματικήν διένεξιν του πατρός του, δημοσιευθείσαν τω 1816 υπό τινος ενδιαφερομένου εις την μνήμην των σοφών τούτων διδασκάλων των Ιωαννίνων*». Την πολύ μεγάλη καθυστέρηση, 60 χρόνων, μέχρι την έκδοση της διαμάχης θα την ερμηνεύσουμε παρακάτω, στην ενότητα «**βουθυσίη ή βουστασίη**;»

[29] Στην *Αντιπελάργηση* οι δώδεκα μέθοδοι που αναφέρονται είναι καταχωρισμένες υπό την επικεφαλίδα του κειμένου του Ιωάννου Φιλοπόνου, και ο Ευτόκιος μνημονεύεται μόνο μέσα σε τρεχούμενο κείμενο. Η παραβολή όμως πείθει ότι το κείμενο αυτό είναι από τον Ευτόκιο. Αναλύονται εκεί (κατά την σειρά που εμφανίζονται στην *Αντιπελάργηση*, που δεν είναι η ίδια με του Ευτοκίου) οι λύσεις του Πλάτωνος, του Ήρωνος του Αλεξανδρέως, του Φίλωνος του Βυζαντίου, του Απολλωνίου (που είναι μικρή παραλλαγή αυτής που κατέγραψε ο Ιωάννης Φιλόπονος, άλλα ούτως ή άλλως παρόμοια με την μέθοδο του Ήρωνα και του Φίλωνα, που μοιάζουν μεταξύ τους), του Διοκλέους, του Πάππου, του Σπόρου, δύο λύσεις του Μενέχμου (ορθότερα, Μεναίχμου), του Αρχύτα, του Ερατοσθένους και τέλος του Νικομήδη. (Οι δύο λύσεις του Διονυσόδωρου και του Διοκλέους, ενός προβλήματος του Αρχιμήδους, που επίσης περιέχονται στην *Αντιπελάργηση*, δεν υπήρχε λόγος να συμπεριληφθούν). Η άλλη μας κύρια πηγή, που δεν αναφέρεται στην *Αντιπελάργηση,* είναι η *Συναγωγή* του Πάππου. Ας προσθέσουμε ότι την εποχή εκείνη είχε επανεκδοθεί η *Συναγωγή* σε διάφορες λατινικές μεταφράσεις, αλλά δεν υπήρχε **πλήρες** ελληνικό κείμενο (υπήρχαν μόνο εκδόσεις με περικοπές).

[30] Εκείνη την χρονιά, το 1749, απεβίωσε ο Μεθόδιος Ανθρακίτης. Την έκδοση και επιμέλεια της *Οδού*, «*αναπτυχθείσά τε και καλλυνθείσα*» την ανέλαβε ο ίδιος ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος. Παρεμπιπτόντως, η *Οδός* τυπώθηκε στο τυπογραφείο του Βόρτολι στην Βενετία, ενώ επτά χρόνια αργότερα, η *Μέθοδος* τυπώθηκε στην ίδια πόλη από άδηλο τυπογράφο. Παρατηρούμε ότι ο διορθωτής και στα δύο κείμενα είναι ο ίδιος: ο λεξικογράφος και μαθητής του Μπαλάνου Βασιλόπουλου, Γεώργιος Κωνσταντίνου (; - 1786), ο οποίος τύπωσε το 1757, πάλι στου Βόρτολι, το περίφημό του *Λεξικόν Τετράγλωσσον*. Το πιθανότερο λοιπόν είναι να τυπώθηκε και η *Μέθοδος* στου Βόρτολι. Προσθέτουμε ότι ο Κοσμάς Μπαλάνος όταν πολύ αργότερα, το 1803, εξέδωσε τον τέταρτο τόμο της *Οδού*, που ήταν η *Αριθμητική* του πατέρα του, κατηγόρησε τον Γεώργιο Κωνσταντίνου ότι το 1749 επέδειξε αχαριστία προς τον δάσκαλό του και έφερε προσκόμματα ώστε να μην εκδοθεί η

καλά ενημερωμένη ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Σ' αυτήν αναφέρονται, όποτε δίνεται η ευκαιρία, τα προβλήματα του τετραγωνισμού του κύκλου και του Διπλασιασμού του κύβου, ενώ δεν αναφέρεται κανένα άλλο πρόβλημα με ανάλογη έμφαση. Συγκεκριμένα αναφέρει, (διατηρούμε την ορθογραφία του) ότι «*Τούτους διεδέχθεισαν ο Βρίσων, ο Αντιφών και ο Ιπποκράτης ο Χίος, ούτοι επαινούνται, και ελέγχονται παρά του Αριστοτέλους περί του δοκιμασθέντος παρ' αυτών τετραγωνισμού του κύκλου…*», «*…ο Ιπποκράτης…παρά τον τετραγωνισμόν του κύκλου, και τον διπλασιασμό έτι του Κύβου πρώτος ερευνήσατο διά των δύο μέσων αναλόγων…*», «*…ο μεν Μέναιχμος εφευρετής των κωνικών τομών ακούει, δια την επ' άκρον περί αυτάς σπουδήν, ών τῃ δυνάμει εύρε τους δύο μέσους αναλόγους…*», «*παρά του αυτού Ευτοκίου απαριθμείται… και περί διπλασιάσεως του κύβου, τα του Φίλωνος, του Διοκλέους, του Σπόρου, του Ήρωνος, και άλλων…και ο μεν Ήρων αμφοτέροις ευδοκήμει Μηχανικῃ τε και Γεωμετρίᾳ, ῃ γαρ παρ' αυτού παραδοθείσα διπλασίασις του κύβου…έλεγχός έστι της μεγαλονοίας του ανδρός…*»

Το ότι τα προαναφερθέντα δύο προβλήματα απασχολούσαν έντονα και για πολλά χρόνια τον Μπαλάνο Βασιλόπουλο φαίνεται και από την εισαγωγή του, το 1756, στην *Μέθοδο*. Εκεί ο συγγραφέας αναφέρει ότι ησχολείτο 15 χρόνια για την λύση τους, αλλά απέτυχε στον τετραγωνισμό του κύκλου: «*πριν η παρελθείν πενδεκαίδεκα ηλιακάς ολοκλήρους περιόδους…εμπέπτωκα έρωτα θατέρου των πάλαι και νυν απορουμένων πολυθρυλήτων γεωμετρικών προβλημάτων, του εις γεωμετρικήν φημί εύρεσιν των δύο Μέσων συνεχώς εξής Ανάλογον Γραμμών,…, αδύνατον όλως ηγούμενος την του ετέρου επίτευξιν, του εις Τετραγωνισμόν προβαλλομένου του κύκλου…*»

Πέρα από τις αρχαίες αντιμετωπίσεις των περίφημων άλυτων προβλημάτων, ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος γνώριζε και πολλές των σύγχρονών του μαθηματικών. Ο ίδιος μας πληροφορεί, στον πρόλογο της *Μεθόδου*, ότι στην επιστολή του προς την Ακαδημία της Πετρουπόλεως το 1750 έγραψε «*…αξιών αυτούς δηλώσαι μοι δια γραμμάτων οπωσδήποτε έχουσιν τα περί του αυτού προβλήματος, και της τούτου λύσεως. Οι δε απαντώντες τοις εμοίς γράμμασιν, ως εζήτουν, τους των πάλαι και νυν εκτεθεισομένας εφόδους εις λύσιν του τοιούτου προβλήματος δια βραχέων εδήλουν…*». Συμπληρώνει ότι αυτοί ανταποκρίθηκαν αφού «*…ως εζήτουν, τας των πάλαι και νυν εκτεθειμένας εφόδους εις λύσιν του τοιούτου προβλήματος δια βραχέων εδήλουν…»*

Άλλωστε η απαντητική επιστολή της Ακαδημίας της Πετρουπόλεως το 1751, τον παραπέμπει σε συγκεκριμένη σελίδα στα γνωστά και στον ελληνικό χώρο

Αριθμητική. Πάντως και ο ίδιος ο Γεώργιος Κωνσταντίνου είχε προβλήματα με τον Βόρτολι στην έκδοση του λεξικού του αφού (βλέπε Α. Παπαδόπουλου – Βρετού, ενθ. ανωτ. τ. Α', σ.55) «*Του Λεξικού τούτου η έκδοσις είναι ατελής, διότι ο τυπογράφος Βόρτολις…δειλιάσας δια τα πολλά έξοδα, έκαμε και το ευνούχισαν.*»

«*συγγράμματα του Βολφίου*»[31], όπου υπάρχει πληθώρα μεθόδων. Τέλος ο γιος του Κοσμάς αναφέρει στην εισαγωγή του στην *Αντιπελάργηση* ότι, έτι περαιτέρω, «*…επεχείρησαν δε και των νεωτέρων πολλοί εις λύσιν του Προβλήματος γεωμετρικώς, ως εστιν ιδείν παρά τε Κλαυδίῳ, Φραγκίσκῳ, Milliet de Chalos*»[32].

<u>Η μέθοδος</u>. Στηριζόμενοι κυρίως στην *Αντιπελάργηση* θα εξετάσουμε παρακάτω διεξοδικώτερα την συμβολή των διαφόρων προσώπων που εμπλέκονται στην διαμάχη. Θα χρειαστεί λοιπόν σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε την μέθοδο αντιμετώπισης του Δηλίου προβλήματος που πρότεινε ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος, ώστε να γίνουν κατανοητά τα επιχειρήματα των επικριτών του. Ήδη αναφέραμε (και θα τεκμηριώσουμε παρακάτω) την δυσκολία που προκύπτει απ' το ότι ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος ανασκεύασε την αρχική του μέθοδο. Η μία παραλλαγή της μεθόδου είναι αυτή που καταγράφεται στο κείμενο του 1756 και επαναλαμβάνεται στην *Αντιπελάργηση* το 1816. Η άλλη είναι η χρονολογικά μεταγενέστερη, αλλά είναι εκείνη την οποία επέκριναν και αναίρεσαν ο Νικηφόρος Θεοτόκης και ο Ευγένιος Βούλγαρης. Ευτυχώς, εικάζοντας από τα συμφραζόμενα των επικριτών, μπορούμε να *κάνουμε ανασύσταση και της παραλλαγής*, παρ' όλο που πρέπει να στηριχθούμε σε ανύπαρκτο για μας γεωμετρικό σχήμα.

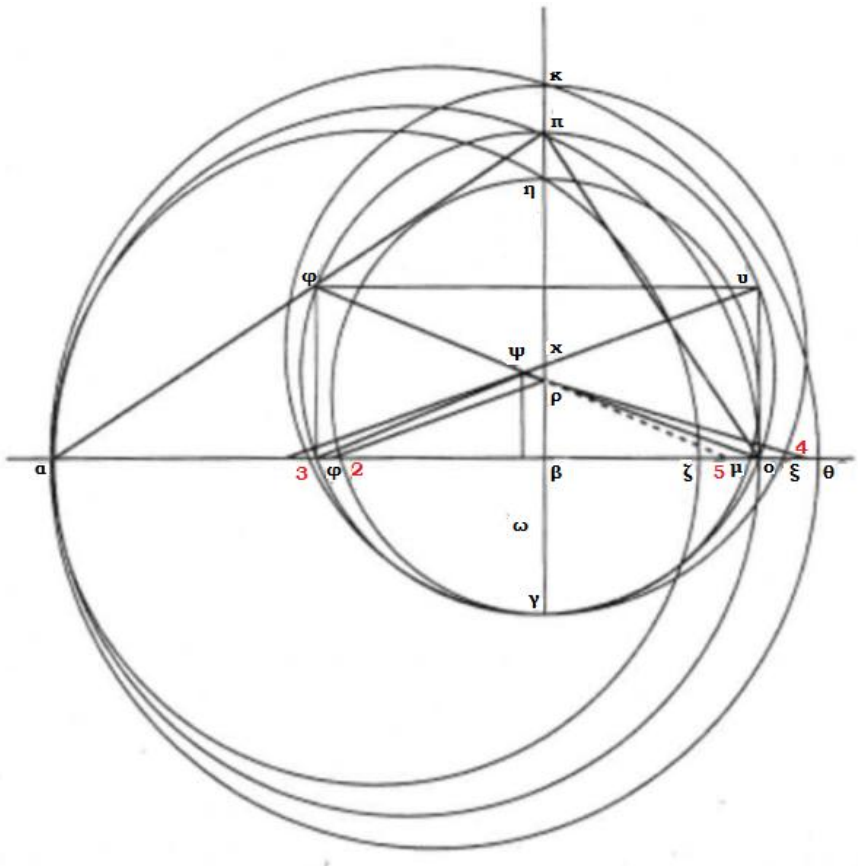
Ας έλθουμε λοιπόν στην περιγραφή της μεθόδου, όπως καταγράφεται στην *Αντιπελάργηση.* Θα ακολουθήσουμε τα δικά του σύμβολα, στο μέτρο του εφικτού, αλλά η περιγραφή θα είναι μόνο για τα κύρια βήματα και με δικά μας λόγια. Αμέσως μετά την περιγραφή της προτεινόμενης μεθόδου, θα δείξουμε πού έγκειται το σφάλμα, ενώ παρακάτω θα δούμε την αντίδραση των λογίων.

---

[31] Christian Wolff (1679 – 1754), πολυγραφότατος Γερμανός φιλόσοφος και μαθηματικός, και σπουδαίος εκλαϊκευτής. Δίδαξε κυρίως στο Πανεπιστήμιο του Halle. Τα φιλοσοφικά του έργα καθώς και το μαθηματικό του έργο «*Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften*» (Halle 1710) (κυρίως από την λατινική του μετάφραση «*Elementa Matheseos Universae*», Halle 1713) ήταν γνωστά στους τότε Έλληνες λογίους. Ο Ευγένιος Βούλγαρης δίδασκε Αριθμητική στην Αθωνιάδα Σχολή, το 1754, από του «*περιαδομένου Ουολφίου*», όπως μας πληροφορεί ο Ιώσηπος Μοισιόδαξ στην περιώνυμη «*Απολογία*»του (Βιέννη 1780). Επίσης σώζονται αρκετά χειρόγραφα, διάσπαρτα σε διάφορες βιβλιοθήκες της Ελλάδας, των Βαλκανίων ή του Σινά, της μετάφρασης του Νικολάου Ζαρζούλη της Αριθμητικής, της Γεωμετρίας και της Τριγωνομετρίας του ιδίου έργου (Βλέπε τους καταλόγους του Γ. Καρά στο βιβλίο του «*Οι επιστήμες στην Τουρκοκρατία*», Αθήνα 1992). Τέλος ο Ζαβίρας αναφέρει (σ. 296 και 496) ότι οι Βούλγαρης και Ζαβίρας μετέφρασαν την Αριθμητική και την Γεωμετρία του Βολφίου (ή Ουολφίου) αλλά έμειναν ανέκδοτες. (Δεν έχει βρεθεί χειρόγραφο της Γεωμετρίας του Wolff κατά Βούλγαρη. Μάλλον ο Ζαβίρας κάνει λάθος και την συγχέει με την μετάφρασή του του Tacquet).

[32] Claude Francois Milliet Dechales (ή De Chales) (1621-1678), Γάλλος Ιησουΐτης μαθηματικός και εκδότης των Στοιχείων του Ευκλείδη. Το έργο του που εννοεί εδώ ο Κοσμάς Μπαλάνος είναι το *Cursus seu mundus mathematicus*, ένα εξαιρετικό, πολυδιαβασμένο και πολύτομο έργο που ασχολείται με όλο το φάσμα των μαθηματικών και παρεμφερών επιστημών. Περιέχει, τρόπος του λέγειν, τα πάντα, αλλά η σκοπιά του στα αλγεβρικά θέματα ήταν, για την εποχή του, παρωχημένη. Αποκορύφωμα του σκόπιμα παλαιού αυτού τρόπου θεώρησης συνοψίζεται σε ένα κεφάλαιό του που τιτλοφορείται «Ανατροπή της Καρτεσιανής υπόθεσης».

Αν αβ, βγ δύο ευθύγραμμα τμήματα (βλέπε σχήμα), παρεμβάλουμε δύο μέσες αναλόγους ως εξής: Παίρνουμε αβ κάθετη στην βγ και βζ=βγ. Γράφουμε το ημικύκλιο αηζ. Παίρνουμε βη=βθ. Γράφουμε τα ημικύκλια ακθ, γημ, γκξ. Διαιρούμε το μξ στο σημείο ο έτσι ώστε ζμ : ξθ = μο : οξ. Γράφουμε το ημικύκλιο οπα. Τότε, αν θέσουμε x=βπ και y=βο, τα τμήματα x, y, ισχυρίζεται ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος, είναι οι ζητούμενες δύο μέσες ανάλογοι. Συγκεκριμένα αβ : x = x : y = y : βγ.



Η απόδειξή του είναι αρκετά περίπλοκη, χρησιμοποιεί σε πολλά σημεία το ότι η παραπάνω κατασκευή δίνει ευθύγραμμα τμήματα σε αναλογία, και τα κύρια βήματά της είναι τα εξής: Φέρνουμε τις σφ και ου κάθετες στην αθ, και την συ παράλληλη στην ίδια. Τέλος φέρνουμε την φυ.

Ισχυρίζεται τώρα ο συγγραφέας ότι η φυ διέρχεται από το ρ. Αν ήταν έτσι τα πράγματα, η κατασκευή του θα ήταν σωστή: Πραγματικά, επειδή η απ είναι κάθετος στην πο, η σο είναι διάμετρος του κύκλου σπο και άρα ο κύκλος αυτός διέρχεται από τα φ, ο και υ. Επειδή και η φυ είναι διάμετρος, το κέντρο του κύκλου θα είναι το ρ (γιατί υποθέσαμε ότι συμπίπτει με το ψ). Άρα ο ίδιος κύκλος θα διέρχεται και από το γ, αφού το ρ είναι το μέσον της πγ. Οπότε, από το τρίγωνο αοπ, η πβ θα είναι η μέση ανάλογος των πβ και βγ, όπως απαιτούμε[33]. Αδήριτη λοιπόν η ανάγκη να αποδειχθεί ο ισχυρισμός αυτός για το ρ.

Η μέθοδος που ακολουθεί είναι με διπλή εις άτοπον απαγωγή: Αν η φυ δεν περνούσε από το ρ, τότε θα περνούσε είτε από πάνω είτε από κάτω του, οπότε ας αποκλείσουμε τα δύο αυτά ενδεχόμενα.

Έστω λοιπόν ότι η φυ έτεμνε την κβ στο χ από πάνω από το ρ και την σο στο ψ. Φέρνουμε την ψω κάθετη από το ψ στην αβ, οπότε φω =ωο. Άρα, όπως εύκολα αποδεικνύεται, η φβ είναι μεγαλύτερη της βο. Παίρνουμε β2=βο (οπότε το 2 θα πέσει δεξιότερα του φ), φέρνουμε την ψ3 παράλληλη στην ρ2 και παίρνουμε 04=φ3. Χρησιμοποιώντας τώρα ότι τα τρίγωνα ψ34, ρ2ο είναι ισοσκελή και ότι οι γωνίες ψ3ω και ρ2ω είναι μεταξύ τους ίσες, έπεται ότι και οι γωνίες ψοβ, ψ4β θα είναι μεταξύ τους ίσες. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι δεν μπορεί η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου, του ψο4, να είναι ίση με την απέναντι εσωτερική.

Με ανάλογο τρόπο, που δεν θα τον καταγράψουμε εδώ για να μην μακρηγορήσουμε, ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος καταλήγει σε άτοπο και στην δεύτερη περίπτωση, οπότε μένει μόνο η εκδοχή που οδηγεί στην ζητούμενη κατασκευή.

Πού όμως έγκειται το σφάλμα στον συλλογισμό;

Είναι στο σχήμα: Δεν έχουμε παρά να παρατηρήσουμε ότι, απλούστατα, η παράλληλος ψ3 της ρ2 **συμπίπτει** με την φψ, και δεν είναι όπως σχεδιάστηκε στο σχήμα. Έτσι το σημείο 3 συμπίπτει με το φ και άρα το 4 με το ο, οπότε το τρίγωνο ψο4 εκφυλίζεται και δεν στοιχειοθετείται άτοπο. (Το ότι η ψφ είναι παράλληλη της ρ2 είναι απλό: η ρβ είναι μεσοκάθετος της 2^{o}, οπότε οι γωνίες ρ2β και ροβ είναι ίσες. Αλλά η τελευταία είναι ίση με την ψφβ από την ισότητα των ημιδιαγωνίων του ορθογωνίου παραλληλογράμμου φσυο. Σχηματίζονται έτσι δύο ίσες εντός εναλλάξ γωνίες).

<u>Παραλλαγή και ανασύσταση</u>. Στην *Αντιπελάργηση* υπάρχει ανατύπωση της *Μεθόδου* με την προτεινόμενη λύση του Δηλίου προβλήματος. Επίσης υπάρχει η επιστολή του Βούλγαρη προς τον Τρύφωνα που επικρίνει την λύση: Η επιστολή προκλήθηκε από το γεγονός ότι ο δεύτερος έστειλε στον πρώτο το κείμενο της *Μεθόδου*[34].

[33] Το τελευταίο βήμα της απόδειξης, μετά το «Πραγματικά», δεν είναι ακριβώς όπως την διετύπωσε ο επινοητής της μεθόδου, αλλά μία δική μας απλοποίησή της. Επειδή δεν αλλάζει η ουσία και κυρίως γιατί το σφάλμα στον συλλογισμό του **δεν** βρίσκεται σε αυτό το σημείο, προτιμήσαμε να αποφύγουμε την μακροσκελέστερη (και σε μερικά σημεία ελλιπέστερη) απόδειξη.

[34] Κούμας, *Ιστορίαι*, όπου γράφει «*ο Ευγένιος λαβών εις τον Άθωνα το βιβλιάριον από τον προειρημένον Τρύφωνα (1757), δι' επιστολής του προς τον πέμψαντα αναίρεσε την λύσιν…*»

Η επιστολή του Βούλγαρη περιέχει περιγραφή της κατασκευής του Μπαλάνου Βασιλόπουλου, η οποία, παρατηρεί κανείς, ακολουθεί σχεδόν επί λέξει την *Μέθοδο*[35]. Μετά την περιγραφή έπεται περιγραφή της απόδειξης με σκοπό να εντοπισθεί το σφάλμα. Αρχικά η απόδειξη είναι πανομοιότυπη με αυτήν της *Μεθόδου*, αλλά από ένα σημείο και μετά παρεκκλίνει. Συγκεκριμένα, στην *Μέθοδο* αφαιρείται από την φβ η β2 ίση με την βο, και μετά άγεται η φ3 παράλληλη της ρ2. Αντίθετα στην επιστολή του Βούλγαρη, πρώτα άγεται η ρ2 παράλληλη προς την φψ και μετά αφαιρείται από την ωμ η μ5 ίση με την λ2[36]. Από κει και πέρα η περιγραφή της απόδειξης παίρνει διαφορετική μορφή, παραπλήσια αλλά όχι ταυτόσημη, από αυτήν που διαβάζουμε στην *Μέθοδο*.

Δυστυχώς στην επιστολή του Βούλγαρη η περιγραφή *δεν συνοδεύεται από σχήμα* (υποθέτει ότι ο αναγνώστης, ο Τρύφων, το έχει μπροστά του). Πάντως κρίνοντας από τα συμφραζόμενα μπορούμε να κάνουμε ανασύσταση και της απόδειξης και του αντίστοιχου σχήματος. Π.χ. η διακεκομμένη γραμμή ψ5 του σχήματος που παραθέτουμε είναι τμήμα της κατασκευής του Μπαλάνου Βασιλόπουλου, όπως την διαβάζουμε στην επιστολή του Βούλγαρη, αλλά όχι στην *Μέθοδο*. Το τι ακριβώς συμβαίνει θα το εξετάσουμε σε λίγο. Για την ώρα τονίζουμε ότι στο τελευταίο βήμα της απόδειξης η τεχνική είναι πάλι με απαγωγή σε άτοπο, όπως και στο αρχικό βήμα, αλλά αυτή την φορά βασίζεται στο τρίγωνο ρ5ο στην θέση του ψο4.

Με τις αλλαγές αυτές η κατασκευή δεν σώζεται. Απλούστατα το σφάλμα της απόδειξης μεταφέρεται αλλού και έγκειται στο ότι εκφυλίζεται το τρίγωνο ρ5ο, οπότε όπως πριν, δεν στοιχειοθετείται το άτοπο.

Την ερμηνεία των παραπάνω διαφοροποιήσεων της *Μεθόδου* από αυτά που διαβάζουμε στην επιστολή του Βούλγαρη πρέπει να την ανιχνεύσουμε σε κάποιες νύξεις που υπάρχουν στην εισαγωγή ή στις επιστολές που περιέχονται στην *Αντιπελάργηση*.

Στην επιστολή του Θεοτόκη διαβάζουμε «*επειδή βλέπει* (ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος) *πως* ***εις το διάγραμμα οπού ετυπώθη***, *πλέον δεν συμπεραίνει το άτοπον, οπού είχεν σκοπόν να συμπεράνει, δια το να έπεσε* (δηλαδή εκφυλίστηκε) *το τρίγωνον ρ5ο* ***γράφει άλλο διάγραμμα και μου στέλνει***, *δια να κατασκευάση το τρίγωνον. Και κατασκευάζει βέβαια το τρίγωνον, αλλά το άτοπον δεν συμπεραίνεται*» (οι υπογραμμίσεις εδώ και σε όλα τα παρακάτω, δικές μας).

---

35 Το λέει άλλωστε και ο ίδιος, «*προύργον δ' ουν ημίν…προστήσασθαι… την κατασκευήν και απόδειξην ανελλιπώς τε, και ακριβώς , και τι άλλο, ή επί λέξεως*:»

36 Για να μην φορτωθεί το σχήμα, δεν σημειώσαμε το σημείο λ. Είναι πάντως εκεί που ο κύκλος γμη τέμνει την αβ. Επίσης το σημείο 5 δηλώνεται ως 3 στον Βούλγαρη: του αλλάξαμε ονομασία για να μην γίνει μπέρδεμα με το σημείο 3 της *Μεθόδου* στο σχήμα μας. Η ουσία φυσικά δεν αλλάζει. (Παρακάτω σε μία παραπομπή στην επιστολή του Θεοτόκη, συμβολίσαμε το ίδιο σημείο 3 πάλι με 5, για την ομοιομορφία).

Αν στα παραπάνω σχόλια από τις επιστολές Βούλγαρη και Θεοτόκη συνυπολογίσουμε το γεγονός ότι στην εισαγωγή της *Μεθόδου* ο συγγραφέας γράφει «*και εν Ουενετίας ταύτας απέστειλα* (δηλαδή τις απαντήσεις στις ενστάσεις που πρόβαλαν ορισμένοι) *μετά της προτάσεως, προς τους εκεί διατρίβοντας γνησίους μαθητάς μου* (οι οποίοι φρόντισαν την έκδοση της Μεθόδου), ***μικράν τινά παραλλαγήν****…*» συμπεραίνουμε ότι: *αφού* τυπώθηκε η Μέθοδος, ο συγγραφέας της αντιλήφθηκε το σφάλμα γι' αυτό ***άλλαξε*** την κατασκευή του για να την επιδιορθώσει, όπως εσφαλμένα νόμιζε. Με λίγα λόγια, όταν ο ίδιος έστειλε στον Θεοτόκη αντίτυπο της νεοεκδοθείσης τότε *Μεθόδου* και ο Τρύφων όταν έκανε το ίδιο στον Βούλγαρη, *τους επεσύναψαν στην επιστολή τους την νέα και ανακατασκευασμένη απόδειξη της κατασκευής*, όπως τεκμηριώσαμε. Σε αυτήν την ανασκευή απαντούν οι δύο παραλήπτες, οι οποίοι την αναιρούν ούτως ή άλλως, όπως θα δούμε.

Συμπληρώνουμε ότι δεν ήταν η πρώτη φορά που ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος βελτίωσε, όπως νόμιζε, την κατασκευή του. Τρία χρόνια νωρίτερα είχε κάνει το ίδιο όπως λέει στην επιστολή του προς την Ακαδημία της Πετρουπόλεως το 1753, «*εις ανασκευήν των… ενστάσεων και εμπέδωσιν του προβλήματος,* ***μικρόν τι παραλλάξας την της πρώτης δείξεως κατασκευήν****…*»

Καιρός όμως να εξετάσουμε τις επικρίσεις των τότε μαθηματικών στην προτεινόμενη μέθοδο επίλυσης του Δηλίου προβλήματος. Όπως θα διαπιστώσουμε, οι αντιρρήσεις ήταν τριών ειδών.

Επικρίσεις. Οι περισσότερες απαντήσεις που έλαβε από τις Ακαδημίες ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος, όσες έλαβε, ήταν ευγενικές, τον επαινούσαν για τους κόπους του, τον παρέπεμπαν στην βιβλιογραφία, αλλά δεν έμπαιναν στην ουσία. Η αιτία ήταν ανεξάρτητη της αποδοχής ή μη της μεθόδου, και την εξηγεί ο Νικόλαος Ζαρζούλης στην επιστολή του προς τον δάσκαλό του: «*είναι νόμος της ιδίας των ακαδημίας άνωθεν και εξ αρχής να μην επιχειρισθούν ή επικύρωσιν ή αναίρεσιν εις οποιονούν αυτοίς προβληθησόμενον νέον, διατί πολλάκις συμβαίνει ότι η μία Ακαδημία ή αποδέχεται, ή ού εκείνο οπού η άλλη ενδέχεται να μην το κρίνῃ…και να γράφουσιν εναντίον η μία της άλλης…*», «*…και αν ήτον ένας φανερός παραλογισμός* (στη μέθοδο) *ημείς* (δηλαδή η Ακαδημία) *δεν ανεχόμεθα να αποκριθώμεν το ού, έξω μόνον μίαν επιστολήν έχομεν να γράψωμεν προς τον διδάσκαλον σου ευχαριστικήν*».

Οι επικρίσεις στην προτεινόμενη μέθοδο διπλασιασμού του κύβου ήταν συνήθως στερεότυπες και αντανακλούσαν την διάχυτη άποψη, όπως υποστηρίξαμε παραπάνω, που είχαν οι μαθηματικοί από την αρχαιότητα για την μη επιλυσιμότητά του: «*…το πρόβλημα επιπεδικώς μη δυνάμενον καταγραφήναι…*», «*…Όσα προβλήματα αδύνατον είναι να λυθώσι καθώς είναι ο τετραγωνισμός του κύκλου, και άλλα όμοια, φανερά μας το παρασταίνει η ανάλυσις. Και…το ανά χείρας* *πρόβλημα, διαρρήδην μας το δείχνει, …πως όχι δι' ευθείας και υπερβολής το τοιούτον λύεται…*» είναι δύο από τις συνηθισμένου τύπου απαντήσεις που καταγράφονται στην *Αντιπελάργηση*. Σ' αυτές προστίθενται και απαντήσεις της μορφής «*…είδε τόσας και τόσας άλλας μεθόδους και ευρέθησαν παραλογιζόμεναι…*», «*…είδε και τόσας άλλας, και ήτον σφαλεραί, άρα και αύτη είναι σφαλερά…*» που εκδηλώνουν άλλη μια φορά την πεποίθηση του ασκόπου της αναζήτησης, όπως αποφάνθηκε τόσο δραματικά λίγο αργότερα η ίδια η Ακαδημία των Παρισίων.

Πολλοί διαφωνούντες ***δεν*** κοίταξαν την γεωμετρία της μεθόδου, γιατί το θεωρούσαν περιττό. Πρόβαλαν την αλγεβρική/αναλυτική σκοπιά, που ήταν τότε του συρμού, ισχυριζόμενοι ότι αν ήταν σωστή η μέθοδος «*…κινδυνεύει να σφάλει η άλγεβρα εις την οποίαν είναι τώρα επακουμβισμένη όλη η μαθηματική, και η φυσική, η οποία άλγεβρα δείχνει ότι δια να κατασκευασθῇ η ερμηνεία του τοιούτου προβλήματος, χρειάζεται εν στερεόν, ή μίαν παραβολήν, και μίαν υπερβολήν, δια δε του κύκλου είναι αδύνατον, και πως η άλγεβρα θέλει το στερεόν…*». Παραδείγματος χάριν η απάντηση (που εκδηλώθηκε με σκαιά συμπεριφορά) του «Πάδρε Ρικάτη» είναι απόλυτα εναρμονισμένη με την δαήμονα γνώση του: εκείνον τον καιρό έγραφε το βιβλίο του *Opusculorum ad res physicas et mathematicas pertinentium* (Bologna 1756-1762), όπου μεταξύ άλλων λύνει τις τριτοβάθμιες εξισώσεις με την νέα τότε μέθοδό του όπου γίνεται χρήση, για πρώτη φορά στην Ιστορία των Μαθηματικών, των υπερβολικών συναρτήσεων. Το άλλο άκρο δηλαδή από τις κλασικές μεθόδους, με χρήση ριζικών. Ηχούσε λοιπόν, κατά τη γνώμη του, τουλάχιστον φαιδρή η άποψη ότι ένας μικρής εμβέλειας μαθηματικός από άσημη πατρίδα επινόησε λύση της τριτοβάθμιας με χρήση (μόνο) τετραγωνικών ριζών. Εκεί που είχαν αποτύχει οι πάντες, και επινόησαν μεθόδους της υψηλοτέρας μαθηματικής για να παρακάμψουν τις δυσκολίες, ήρθε ένας απληροφόρητος κομίζοντας γλαύκαν εις Αθήνας. Αλλά, όπως πικρά παραπονείται ο Ζαρζούλης, «*ημάς τις μας ακούει, έστωντας να είναι παρ' αυτοίς περιφρονούμενοι εις τον παρόντα αιώνα οι Έλληνες…αμή τι δυνάμεθα να κάμωμεν ημείς εν τῃ καταπτώσει του γένους ημών, και εν καιρῷ οπού οι Έλληνες ζητούσι παρ' αυτών*;»

Επιχειρήματα όπως τα παραπάνω, αγεωμέτρητα, κατά της μεθόδου του Μπαλάνου Βασιλόπουλου, δεν τον έπεισαν ότι η κατασκευή του ήταν εσφαλμένη. Εκεί ο καταπονηθείς διεκδικητής της δάφνης για την επίλυση του αρχαίου προβλήματος είχε δίκαιο, και υπεραμύνθηκε των απόψεών του αντικρούοντας σθεναρά τους ετερογνωμούντες. Ζητούσε να θέσουν το ζήτημα επί τάπητος και να καταδείξουν, όπως ώφειλαν, το σφάλμα, εάν υπήρχε τέτοιο. Ο ίδιος λέει «*Πολλάκις την κατασκευήν…ερευνήσας, μη κρύπτηταί τις παραλογισμός, και μηδέν τοιούτον ευρών, πέπεισμαι εμαυτῷ, υγιώς έχειν τα πάντα και γεωμετρικαίς ασφαλίζεσθαι αρχαίς. Αλλ' ου μέντοι γε εφησυχάζειν ηδυνάμην, αν μη και παρ' άλλοις κριταίς τα αυτά δόξειεν*». Αντιθέτως η Ακαδημία της Πετρουπόλεως του απάντησε, όπως μας πληροφορεί ο ίδιος, με ενστάσεις «*δια των αριθμητικών* (δηλαδή αλγεβρικών) *εφόδων, **αλλά μη γεωμετρικώς ως εζήτουν***» και «*το δε τοιούτον γεωμετρικόν* *πρόβλημα, το παρά πάσιν μεν των Γεωμετρών παισί θαυμαζόμενον, παρά πολλών δε επιμελώς ζητούμενον, και τίσιν, ως* ***κριθέν αδύνατον, αλλοτρίοις εφόδοις θεραπευόμενον***». Τα παραπάνω τα επιβεβαιώνει και ο γιος του Κοσμάς, ο οποίος γράφει «*οι μεν πλείστοι αλγεβραϊκώς εβασάνιζον το πρόβλημα,* ***ο δε απήτει γεωμετρικώς****, ως εικώς, βασανίζεσθαι τα υπ' αυτού γεωμετρικώς κατασκευαζόμενα και αποδεικνύμενα*».

Συνοπτικά, οι παραπάνω αντιδράσεις χαρακτηρίστηκαν από τον λύτη ως ανεξήγητες προκαταλήψεις. Μία φράση του Ζαρζούλη στην επιστολή του προς τον δάσκαλό του το 1754, τα λέει όλα: «*…μετά πολύν αγώνα είδομεν, ότι δεν παύουν οι εναντίον, όντες προκατειλημμένοι από το αδύνατον…*».

Του ίδιου τύπου χαρακτηρισμός αποδόθηκε από τον Μπαλάνο Βασιλόπουλο και στην απάντηση του Euler, αλλά μάλλον εδώ ο λύτης δεν κατανόησε (όπως θα υποστηρίξουμε παρακάτω) την απάντηση του μεγάλου μαθηματικού. Ας δούμε λοιπόν διεξοδικά τα περιστατικά με τον Euler.

<u>Euler</u>. Το 1750 ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος έγραψε στην Ακαδημία της Πετρουπόλεως με αίτημα, όπως προαναφέραμε, να τον πληροφορήσουν για τις γνωστές μεθόδους λύσης του προβλήματος. Στο ίδιο γράμμα (που δεν σώζεται, αλλά το αναφέρει ο ίδιος στον πρόλογο της *Αντιπελάργησης*) τους αναγγέλει ότι έχει και αυτός μία δική του μέθοδο, την οποία θα τους την ανακοίνωνε αν ενδιαφερόντουσαν.

Η Ακαδημία, φυσικά, του ζήτησε να της σταλεί η μέθοδός του. Πραγματικά, όπως μας πληροφορεί ο ίδιος με δικά του λόγια, «*μηδένα έχων δισταγμόν, εν τάχει προς την αυτήν απέστειλα Ακαδημίαν την διά πολλών πόνων, ουκ ολίγων δε ιδρώτων ευρεθείσαν μοι λύσιν του Προβλήματος*».

Μετά από επτά μήνες (!) η Ακαδημία απάντησε με τις αριθμητικές (αντί γεωμετρικές όπως ανέμενε) ενστάσεις που αναφέραμε λίγο παραπάνω. Η επιστολή αυτή δεν σώζεται, αλλά από μία Τρίτη προς την Ακαδημία επιστολή του Μπαλάνου Βασιλόπουλου, το 1753 από τα Ιωάννινα, βγαίνει το συμπέρασμα ότι η ένσταση προερχόταν από τον Euler (1707-1783): «*…αντί της παρ' υμών ελπιζομένης της αυτής εφόδου επιβεβαιώσεως, εδέχθην την παρά του σοφωτάτου, ως γράφουσιν, Έϋλερ ανασκευήν ταις αριθμητικαίς συνισταμένην εφόδοις…*». (Η επτάμηνη καθυστέρηση, για την οποία παραπονείται, δεν οφείλεται σε ολιγωρία. Ο Euler είχε φύγει προ καιρού από την Πετρούπολη για το Βερολίνο, για να επιστρέψει πολύ αργότερα. Το ότι η προς την Ακαδημία της Πετρουπόλεως επιστολή έφτασε ποτέ στον Euler στο Βερολίνο εξηγείται από το γεγονός ότι σε όλο το μεσοδιάστημα ο μεγάλος μαθηματικός διατηρούσε επαφή με την Ακαδημία, η οποία του έδινε μισθό ακόμα και όταν οι δύο χώρες ήταν μεταξύ τους εμπόλεμες[37]).

Ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος εξοργίστηκε από το γεγονός ότι ο Euler δεν μπήκε στην ουσία αλλά υποστήριξε, αντιθέτως, ότι οι γεωμετρικές μέθοδοι υπολείπονται των αριθμητικών, «*ως μικράν δήθεν εχουσών ισχύν, των γεωμετρικών αρχών τε και αποδείξεων* (έναντι των αριθμητικών εφόδων), *όπου γε μάλλον τούναντίον έδει ποιῆσαι* (ο Euler), *τας γεωμετρικάς του προβλήματος αποδείξεις γεωμετρικώς βασανίσας*». Στο σημείο αυτό της επιστολής του, του 1753, ειρωνεύεται τον Euler (και υποθέτω μαζί με αυτόν, όλους τους εναντιωμένους στην συνθετική γεωμετρία) με την παροιμία ότι «αφείς την υπέραν τον πόδα διώκειν», που χρησιμοποιείται εις βάρος αυτών που επιδεικνύουν αδιαφορία για τα σπουδαιότερα και στην θέση τους ενδιατρίβουν με τα φαύλα[38].

Χωρίς την επιστολή του Euler δεν μπορούμε βέβαια να γνωρίζουμε με ακρίβεια τα λεγόμενά του. Θα υποστηρίξουμε όμως στα παρακάτω ότι, αντίθετα από ό,τι λέει ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος, έχουμε κάθε λόγο να πιστεύουμε ότι η απάντηση του Euler *ήταν* επί της ουσίας. Στο κάτω κάτω είναι δύσκολο να πιστέψει κανείς ότι ο χαλκέντερος και συνεπής αυτός μαθηματικός, ο πολυγραφότερος μεταξύ όλων των μαθηματικών όλων των εποχών, είχε στα χέρια του την λύση ενός προβλήματος 2000 ετών που η Ακαδημία της Πετρουπόλεως έκρινε σκόπιμο να του την στείλει ακόμη και στο Βερολίνο, και να την άφηνε αβασάνιστη.

Παρ' ότι είναι επισφαλές να βγάζουμε συμπεράσματα βασιζόμενοι στα ελάχιστα στοιχεία που έχουμε στην διάθεσή μας, μπορούμε, και οφείλουμε, να κάνουμε ανάλυση από μαθηματική σκοπιά των διαφόρων νύξεων που μας σώζονται. Στο μέτρο που η μαθηματική ανάλυση συμπίπτει με τις απόψεις κάποιου, ιδίως αν αυτός ο κάποιος είναι της ολκής του Euler, απορρέει ένα και μόνον ένα συμπέρασμα: όσα έλεγε δεν ήταν επιπόλαιες απόψεις ή απλώς γενικότητες (όπως νόμιζε ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος), αλλά η γνώμη του επαΐοντος.

Ας δούμε λοιπόν τους λόγους που προβάλλουμε για να υποστηρίξουμε ότι ο Euler όντως ***ασχολήθηκε*** με την μέθοδο Διπλασιασμού του κύβου που έλαβε να εξετάσει.

Στην εισαγωγή της *Μεθόδου* του το 1756 (η οποία επαναλαμβάνεται στην *Αντιπελάργηση*), ο συγγραφέας συνοψίζει το ιστορικό της αλληλογραφίας του με την Ακαδημία της Πετρουπόλεως. Σε ένα σημείο γράφει ότι η Ακαδημία του έστειλε (κακώς κατά την γνώμη του, όπως είδαμε) αριθμητική ένσταση εκεί που ήταν

[37] Ο Euler ήταν στην Πετρούπολη από το 1720 έως το 1741 και ξανά από το 1766 μέχρι τον θάνατό του. Για λεπτομέρειες μπορεί κανείς να ανατρέξει στις διάφορες βιογραφίες του, που κυκλοφορούν και στα Ελληνικά.

[38] Η ωραιότερη εξήγηση της παροιμίας είναι από το λεξικό του Σουΐδα που γράφει «***υπέρα***, *το του κέρατος του ιστού σχοινίον, ᾧ ανίεταί τε και διατείνεται. Γέγονε δε από τούτου παροιμία επί των ά δει έχειν αφιέντων, ά δε μη δει κρατούντων»*.

επιβεβλημένο να εξετάσει το θέμα γεωμετρικά. Με άλλα λόγια αναφέρεται στην απάντηση του Euler, αφού αυτό ήταν το περιεχόμενό της, όπως τεκμαίρεται από την επιστολή του 1753, όπου ειρωνεύεται τον μεγάλο μαθηματικό. Σ' αυτό το σημείο επαναλαμβάνει αλλά και προσθέτει «

«γενομένης της βασάνου επί του προβλήματος…δια των αριθμητικών εφόδων, αλλά μη γεωμετρικώς…διό και οι ευρεθέντες αριθμοί αντί των δύο μέσων συνεχώς εξής ανάλογον γραμμών των γεωμετρικώς ευρεθεισών, ***ελάττονες ήσαν των αριθμητικώς ευρισκομένων***».

Αυτά σημαίνουν ότι ο Euler αποφάνθηκε πως η λύση του δεν ήταν σωστή αλλά μικρότερη της αληθούς.

Είχε άραγε δίκιο; Αν ναι, τότε σημαίνει ότι εξέτασε το θέμα, γιατί αποκλείεται να απάντησε τόσο κατηγορηματικά χωρίς επισταμένη σπουδή (θα δούμε όμως και άλλα επιχειρήματα για να τεκμηριώσουμε την άποψή μας). Για την ώρα ας δείξουμε πώς βγαίνει το συμπέρασμα σχετικά με το «*ελάττονες ήσαν των αριθμητικώς ευρισκομένων*».

Η απλούστερη ίσως αντιμετώπιση είναι με στοιχειώδη αναλυτική γεωμετρία, κοινή τότε (όπως και σήμερα) μέθοδο προσέγγισης τέτοιων προβλημάτων και ιδιαίτερα προσφιλής στον Euler, ο οποίος υιοθετεί συστηματικά αυτή την σκοπιά ήδη από το 1748, όταν δημοσίευσε το περίφημό του *Introductio in Analysin infinitorum.*

Δεν έχει εδώ σημασία το πώς ακριβώς σκέφθηκε ο Euler (το θέμα είναι τετριμμένο για έναν τόσο προικισμένο μαθηματικό), πάντως τα ακόλουθα είναι μία πιθανή, και απλή , θεώρηση. Θα δώσουμε όμως μόνο περίληψή της, αφού οι πράξεις είναι πολλές και ανιαρές, αλλά εύκολα ελέγξιμες.

Με κέντρο αξόνων το β (βλέπε σχήμα), έστω οι συντεταγμένες του α οι (-a, 0) και του ζ οι (b, 0), οπότε του γ είναι οι (0, -b). Τότε υπολογίζονται κατά σειρά η βη (και η ίσης της βθ), η βκ, η βμ και η βξ ως $a^{1/2}b^{1/2}$, $a^{3/4}b^{1/4}$, $a^{1/4}b^{3/4}$, $a^{3/8}b^{5/8}$ αντίστοιχα. Ας θέσουμε τώρα τις συντεταγμένες του ο ως (λ, 0). Ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος θέτει συγκεκριμένη τιμή για το λ, αλλά προσωρινά και για λόγους που θα φανούν παρακάτω, ας εξετάσουμε το θέμα λίγο γενικότερα. Το μόνο που απαιτούμε από το ο είναι να βρίσκεται μεταξύ των μ και ξ. Οι συντεταγμένες του π είναι τότε $(0, a^{1/2}\lambda^{1/2})$.

Τώρα, η ευθεία απ υπολογίζεται ως η $y = \lambda^{1/2} a^{1/2}x + \lambda^{1/2} a^{1/2}$. Επίσης αφού το ρ είναι το μέσον της πγ, οι συντεταγμένες του υπολογίζονται, όπως υπολογίζεται και η ευθεία ορ ως η $2\lambda y = (b - a^{1/2}\lambda^{1/2})(x – \lambda)$. Όμως το σ είναι η κοινή τομή των δύο προηγούμενων ευθειών και ψ το μέσον της ος. Μετά τις πράξεις βρίσκουμε ότι η τετμημένη του ψ είναι $(\lambda^{5/2} – b\lambda a^{1/2}) / (2\lambda^{3/2} + a\lambda^{1/2} – ba^{1/2})$.

Ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος ισχυρίζεται ότι το ψ συμπίπτει με το ρ. Αυτό όμως γίνεται αν και μόνο αν η τετμημένη του ψ είναι μηδέν, δηλαδή αν και μόνο αν

$\lambda^{5/2} = b\lambda a^{1/2}$ ή, ισοδύναμα, $\lambda^3 = b^2a$. Με άλλα λόγια *το ψ συμπίπτει με το ρ αν και μόνο αν το σημείο ο παρεμβάλει την μία από τις δύο μέσες αναλόγους μεταξύ των a και b*.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, δυστυχώς, η κατασκευή υποπίπτει σε φαύλο κύκλο, αφού ήδη στον προσδιορισμό του ο απαιτείται μήκος όσο το τελικά ζητούμενο. Ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος δεν το αντιλήφθηκε αυτό και τουναντίον κατασκεύασε το σημείο ο ανεξάρτητα, ως τομή του μξ σε αναλογία ίση με τον λόγο ζμ : ξθ. Το ο του λύτη μπορεί λοιπόν να υπολογιστεί. Μετά από πολλές αλλά απλές πράξεις βγαίνει ότι το ο έχει τετμημένη

$$\Lambda = A^3B^3 (A^2 + AB + B^2) / (A^3 + AB^2 + B^3)$$

(όπου για τυπογραφική ευκολία θέσαμε $A = a^{1/8}$ και $B = b^{1/8}$). Ο τελικός αυτός αριθμός αποδεικνύεται μικρότερος του σωστού $a^{1/3}b^{2/3} = A^{8/3}B^{16/3}$. Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη, αλλά για ευκολία θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση a = 2b, που μας ενδιαφέρει στο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου (σε αντιδιαστολή με το γενικότερο πρόβλημα της παρεμβολής δύο μέσων αναλόγων σε οποιαδήποτε δύο τμήματα[39]). Στην περίπτωση αυτή βγαίνει (κάναμε τις πράξεις με υπολογιστή τσέπης) ότι το Λ ισούται με 1,2556…, ενώ η σωστή τιμή είναι $2^{1/3}$= 1,2599…

Συμπέρασμα: Ο Euler είχε δίκιο. Και το σπουδαιότερο, η απάντησή του ήταν αποστομωτική. *Δεν χρειάστηκε να εμπλακεί σε διαμάχη για το αν η γεωμετρική μέθοδος ήταν σωστή ή όχι.* Ελέγχει την απάντηση, αποδεικνύει ότι δεν είναι η ζητούμενη και τα πολλά λόγια είναι φτώχεια. Αναμφίβολα το γράμμα του Euler θα ήταν γεμάτο από πράξεις όπως οι παραπάνω, ή μία παραλλαγή τους, τις οποίες ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος δεν κατανόησε (θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό) και γι' αυτό διαμαρτύρεται εναντίον των «αριθμητικών εφόδων». Είχε άδικο.

Ωστόσο ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος δεν έμεινε αδρανής. Έγραψε ξανά στον Euler «*εις ανασκευήν παρά των του Έϋλερ ενστάσεων*», παρ' όλο που ήταν βαριά άρρωστος με ελώδη νόσο, «*χρονίῳ, τεταρταίῳ, συνεχόμενος πυρετῷ*». Το γράμμα δυστυχώς δεν σώζεται, αλλά η πληροφορία προέρχεται από την επιστολή του 1753 προς την Ακαδημία της Πετρουπόλεως. (Το ότι έγραψε χωριστά στον Euler σημαίνει ότι η επιστολή προς τον μεγάλο μαθηματικό εστάλη, αυτή την φορά, στην σωστή διεύθυνση). Στην επιστολή αυτή προς την Ακαδημία ο λύτης διευκρινίζει, χωρίς απόδειξη, ότι «…*ορθώς η μξ κατά το ο τέμεται*…» θέλοντας να δικαιολογήσει την επιλογή του του σημείου ο, την οποία τόσο εύστοχα ανέτρεψε ο Euler. Επίσης πληροφορεί την Ακαδημία ότι έγραψε στον Euler «…*δευτέραν απόδειξιν εκ του επιλογισμού της κατά το ο διαιρέσεως της μξ εναπολαμβανομένης*».

[39] Ας παρατηρήσουμε την λεπτομέρεια ότι ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος αντιστρέφει τον συνήθη ρόλο των a και b, όπου το b επιλέγεται μεγαλύτερο του a. Θέτει a=2b αντί του συνηθέστερου b=2a. Τα μαθηματικά, φυσικά δεν αλλάζουν.

Φυσικά το σφάλμα στην κατασκευή δεν διορθώθηκε. Πάντως, από τότε και στο εξής, οι επιστολές του λύτη προς τις Ακαδημίες έχουν μία προσθήκη, *έξω από το κυρίως μαθηματικό κείμενο*, εξηγώντας γιατί η επιλογή του σημείου ο ήταν η σωστή! Η προσθήκη ήταν βέβαια περιττή (και εσφαλμένη). Παρατηρούμε επίσης ότι στην έκδοση της *Μεθόδου* το 1756 υπάρχει και εκεί, *έξω από το κυρίως κείμενο*, μία προσθήκη η οποία δείχνει ότι έγινε την τελευταία στιγμή γιατί δεν συνοδεύεται από την παράλληλη Λατινική μετάφραση όπως το υπόλοιπο κείμενο. Εκεί υπάρχει επιχειρηματολογία για τη «σωστή» επιλογή του σημείου ο, με την αιτιολογία ότι «*επιστάσεως μεν τοι άξιον, ότι η μξ, εναπολαμβανομένη γραμμή…διήρηται κατά το ο…ως προηρμήνευται, ότι ουκ ενδέχεται άλλως την αυτής γενέσθαι διαίρεσιν*.»

Το πιθανότερο λοιπόν η προσθήκη αυτή να είναι η ίδια με αυτήν που έστειλε ο λύτης προς τον Euler. Δυστυχώς όμως τα επιχειρήματα είναι δυσνόητα, συσκοτίζουν αντί να διαφωτίζουν, και δεν απαντούν στην ένσταση. Δεν θα επαναλάβουμε εδώ τις δύο σελίδες των επιχειρημάτων. Θα αρκεστούμε μόνο να αναφέρουμε ότι ουσιαστικά αποδεικνύουν ότι το σημείο ο πρέπει να είναι μεταξύ των μ και ξ (σωστό αλλά δεν αρκεί) και κατόπιν αποδεικνύουν (σωστά αλλά με δύσκολο τρόπο) ορισμένες γνωστές ιδιότητες των αναλογιών. Με άλλα λόγια, η επιστολή του Μπαλάνου Βασιλόπουλου προς τον Euler δεν αναιρεί τις ενστάσεις. Και μόνο το γεγονός ότι, όπως φαίνεται, ήταν μακροσκελής, δείχνει ότι και ο Euler έγραψε ουσιαστικά πράγματα, τα οποία όμως δεν έγιναν κατανοητά (παρακάτω δίνουμε εξήγηση γιατί αυτό δεν πρέπει να μας ξενίσει).

Στην δεύτερη επιστολή του λύτη ο Euler δεν απάντησε, αφού όπως μας πληροφορεί ο ίδιος ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος το 1753, «*ούτε παρ' υμών δια γραμμάτων έμαθον τα περί της αυτής απαντήσεως*…». Την σιωπή μάλιστα αυτή του μεγάλου μαθηματικού ο Θεοτόκης την εκλαμβάνει ως μήνυμά του ότι είδε το λάθος: «*δια να μην κάμω εκείνο οπού ο σοφός Έϋλερ έκαμεν*…», λέει ο Θεοτόκης στην επιστολή του του 1756, «…*ο οποίος σιωπώντας εις την λύσιν της ενστάσεώς του, ίσως με την σιωπήν απεκρίθη*». Θα συμφωνήσουμε. Η πρώτη απάντηση του Euler ήταν τόσο ανατρεπτική, τέτοια γλωσσοπέδη, που περίττευε νέα απόκριση αφού δεν προέκυψε τίποτα το νέο.

Η ιστορία είχε και μικρή συνέχεια.

Στην εκτενή επιστολή του από την Βενετία το 1754 προς τον δάσκαλό του, ο Νικόλαος Ζαρζούλης υποσχέθηκε ότι θα έστελνε εκ μέρους του και τρίτη επιστολή στον Euler, «*στέλνονται μετ' ού πολλάς και τα προς τον Έϋλερ, και ο θεός να τους φωτίσει να κρίνουν απαθώς την αλήθειαν*…»[40]. Δεν έχουμε καμία άλλη πληροφορία επί του θέματος και η αλληλογραφία μάλλον τερματίστηκε εκεί.

[40] Ας τονίσουμε ότι όλη η ξενόγλωσση αλληλογραφία του Μπαλάνου Βασιλόπουλου, καθώς και η Λατινική μετάφρασις της *Μεθόδου*, έγινε από τους μαθητές και φίλους του, γιατί ο ίδιος δεν ήξερε ξένες γλώσσες . Για την άγνοιά του αυτή οι βιογράφοι του είναι επικριτικοί και κατηγορηματικοί. Π.χ. ο Μοισιόδακας στην *Απολογία* του αναφέρει «*Λύπης άξιον είναι λογιστέον πάντως, πως ο τηλικούτος ανήρ έτυχε ημοιρηκώς…των διαλέκτων των Ευρωπαίων*».

<u>Έλεγχος των εμπαθών</u>. Υπάρχουν δύο ακόμη επίμαχα σημεία στην μέθοδο του Μπαλάνου Βασιλόπουλου, τα οποία του επεσήμαναν οι διαφωνούντες, αλλά που πάλι δεν τον έπεισαν ότι σφάλλει. Εδώ όμως είχε απόλυτο άδικο. Το ότι η μέθοδός του δεν επιλύει το Δήλιο πρόβλημα είναι απόρροια του εσφαλμένου μαθηματικού συλλογισμού στα δύο αυτά σημεία.

Το πρώτο αφορά την επιλογή του σημείου ο, η οποία ήδη μας απασχόλησε στην προηγούμενη ενότητα, αλλά που θα εξετάσουμε από άλλη σκοπιά στην παρούσα.

Παρατηρεί κανείς ότι *σε κανένα σημείο της απόδειξης δεν γίνεται χρήση του ορισμού του ο ως* κάποιας συγκεκριμένης τομής του τμήματος μξ. Επειδή το ο είναι το ζητούμενο σημείο, έπεται ότι, θέλοντας και μη, η απόδειξη είναι εσφαλμένη. Το σχόλιο του Ευγένιου Βούλγαρη σ' αυτό το σημείο είναι το παραστατικότερο όλων όσοι επεσήμαναν το κενό. Γράφει ότι αν ήταν σωστός ο συλλογισμός, τότε θα ήταν εξ' ίσου σωστός αν το μξ χωριζόταν σε οποιοδήποτε άλλο λόγο, παραδείγματος χάριν «*δίχα τεμνέσθω*», δηλαδή στην μέση. Για του λόγου το αληθές ο Βούλγαρης επαναλαμβάνει την «απόδειξη» λέξη προς λέξη με μόνη διαφορά ότι παίρνει το ο ως το μέσον του μξ. Ιδού, τώρα άλλο σημείο δίνει την λύση! Μετά προσθέτει ειρωνικά, παίζοντας με τις λέξεις, ότι το ίδιο θα ίσχυε και για οποιαδήποτε άλλη τομή, «*αλλά μη δίχα, τρίχα δε είπερ οίον τε ή τέτραχα,…τα αυτά κατασκευάζω, και ταυτά δείκνυμι, και καθ' οιανδήποτε τομήν το ζητούμενον ευρίσκω, ουδέν χείρον μάλλον ουδέ άμεινον ή πρότερον γεωμετρικευόμενος*».

Στο σημείο αυτό η ανταπάντηση του Κοσμά Μπαλάνου δεν είναι επί του μαθηματικού μέρους, αλλά επιστρέφει την ειρωνεία. «*Θαυμάζω*», λέει, «*πως ουκ είπε* (ο Βούλγαρης) *και πένταχα, και δέκαχα, ή χιλίαχα, ή μυρίαχα, ο κομψός ούτος ονοματοποιός κατά το σύνηθες, και ονοματοθέτης*». Επίσης κατηγορεί τον Βούλγαρη ότι στην «*κωμωδίαν υποκρινομένην γεωμετρίαν*» που έγραψε, ούτε καν σκέφθηκε μόνος του την (άστοχη όπως πιστεύει) αντίρρηση σχετικά με την επιλογή του ο, αλλά του την είπε ο Τρύφων εκ Μετσόβου: «*ερανισάμενος* (ο Βούλγαρης) *ενστάσεις τινάς γενομένας εν Ιταλία παρά του Τρύφωνος*». Τόσο «*αγεωμέτρητο*» τον θεωρούσε.

Δεν ήταν όμως ο Τρύφων εκ Μετσόβου και ο Βούλγαρης οι μόνοι που έφεραν αντίρρηση για την ουσιαστικά αυθαίρετη επιλογή του σημείου ο.

Ο Ζαρζούλης στην επιστολή του του 1754 προς τον δάσκαλό του και λύτη γράφει ότι «*έδειξα το πρόβλημα τῳ περιφήμῳ αστρονόμῳ εμῷ όντι καθηγητή εν τῃ αστρονομίᾳ, κυρ Ευσταθίῳ Τζαννώτῃ*». Με τον Zannoti ο Ζαρζούλης αντάλλαξε το άκρον άωτον των ενστάσεων, των ανασκευών των ενστάσεων, και ανασκευών αυτών των ανασκευών, τις οποίες δεν θα επιχειρήσουμε να επαναλάβουμε εδώ για να μην μακρηγορήσουμε. Θα αρκεστούμε μόνο να αναφέρουμε ότι η συζήτηση έμεινε μέσα στα επιστημονικά πλαίσια με δύσκολα επιχειρήματα και από τις δύο πλευρές, και περιεστράφη γύρω από το ότι «*ουκ εποιήσασθε μνείαν της κατά το ο διαιρέσεως κατά την δείξην*».

Και ο ίδιος ο Ζαρζούλης είχε αρχικά αντιρρήσεις με την κατασκευή του δασκάλου του ως προς το σημείο ο. Έγραψε επ' αυτού στον λύτη, αλλά η επιστολή του δεν έφτασε ποτέ στον παραλήπτη. Αν κρίνουμε από τις απαντήσεις του στον Zannoti πάνω στο ίδιο θέμα, τις οποίες κοινοποίησε στον Μπαλάνο Βασιλόπουλο, βλέπουμε ότι ο Ζαρζούλης «βελτίωσε» την αρχική κατασκευή. Φαινομενικά διόρθωνε το κενό αντιστρέφοντας την σειρά κατασκευής του παραλληλογράμμου οφσυ, αλλά (δεν θα υπεισέλθουμε στις λεπτομέρειες) μετά από έναν ακροβατικό συλλογισμό υποπίπτει σε έναν φαύλο κύκλο. Δυστυχώς δεν ξέρουμε το τέλος των αντεγκλήσεων, γιατί δεν έχουμε πληροφορία για το τι απέγινε όταν ο Ζαρζούλης θα ξαναπήγαινε να δει τον Zannoti, όπως λέει στην επιστολή του, για να ελέγξει έναν «*παραλογισμόν διαβολικόν*» του αστρονόμου εναντίον των αντιρρήσεων του Ζαρζούλη σε προηγούμενες αντιρρήσεις του ιδίου. Πάντως δεν θα αποκλείαμε το ενδεχόμενο ο Ζαρζούλης, που ήταν έξοχος μαθηματικός, να τήρησε ένοχη σιωπή σ' αυτό το θέμα. Το υποστηρίζουμε αυτό γιατί τα επιχειρήματά του κατά της επιλογής του σημείου ο, ο Zannoti του τα είπε προφορικά, και ο ίδιος ο Ζαρζούλης τα έστειλε γραμμένα στην επιστολή του προς τον δάσκαλό του: τα κατέγραψε σωστά (δηλαδή τα κατάλαβε), αλλά δεν μας λέει το αποτέλεσμα. Γιατί άραγε; Από σεβασμό προς τον γέρο και άρρωστο τότε «*άγιο δάσκαλό*» του, όπως τον ονομάζει, μήπως τον θίξει; Δεν θα το μάθουμε ποτέ αυτό.

Τέλος, η προσθήκη στην *Μέθοδο*, έξω από το κυρίως κείμενο και χωρίς την παράλληλη λατινική μετάφραση, άλλου ενός «διαπιστευτηρίου» της ορθότητας της επιλογής του σημείου ο, δείχνει ότι και ο ίδιος ο λύτης έβλεπε κάποια προβλήματα στην κατασκευή του. Όλοι βοούσαν και αυτός αντιπαρέρχεται τις διαμαρτυρίες αποκαλώντας τους εμπαθείς, «*προσετέθη δε και τούτο* (δηλαδή η ορθότητα της επιλογής του σημείου ο και της κατασκευής των δύο μέσων αναλόγων)…***προς έλεγχον των εμπαθώς κατ' αυτών φερομένων***».

Εκτός από την διαφωνία των λογίων ως προς την επιλογή του σημείου ο, υπήρχαν και οι αντιρρήσεις που υποδείκνυαν με σαφήνεια το σφάλμα στον γεωμετρικό συλλογισμό. Ο λίβελλος του κλεινού Ευγενίου περιστρεφόταν κυρίως εκεί, και τα περιστατικά της διαμάχης που ενέσκηψε ήταν τα πιο άχαρα στην όλη ιστορία. Ας τα δούμε.

Βουθυσίη ή βουστασίη; Η αντίδραση του Ευγενίου Βούλγαρη, όταν πληροφορήθηκε την προτεινόμενη λύση του Δηλίου προβλήματος, ήταν ιδιαίτερα σφοδρή, αλλά εξ' αιτίας της γράφτηκε η *Αντιπελάργησις*, μισό αιώνα μετά τον θάνατο του πρωταγωνιστή. Ας πάρουμε όμως τα πράγματα από την αρχή.

Το 1756, όταν τυπώθηκε η *Μέθοδος*, ένας από αυτούς που είχαν αντίτυπο ήταν ο μαθητής του Μπαλάνου Βασιλόπουλου, Τρύφων εκ Μετσόβου, ο οποίος σπούδαζε στην Ιταλία όταν λίγο νωρίτερα οι λόγιοι συζητούσαν εκεί την κατασκευή[41]. Ο Τρύφων ήταν φίλος και πρώην συμμαθητής του Βούλγαρη, τον οποίο διαδέχθηκε στην Μαρουτσαία Σχολή (αντίζηλο της σχολής του Γκιούμα όπου σχολαρχούσαν οι Μπαλάνοι) όταν ο Βούλγαρης έφυγε πικραμένος από τα Γιάννενα: Γράφει επ' αυτού ο Κούμας, «*Επειδή εις το σχολείον του Γκιούμα εσχολάρχει ο Βασιλόπουλος Βαλάνος, οι Μαρούτσοι έκτισαν δεύτερον σχολείον εις την πατρίδα των, ονομαζόμενον Μαρουτσικόν, εις το οποίον εκαθίδρυσαν τον νέον διδάσκαλον Ευγένιον…Τώρα οι οπαδοί του Βαλάνου, είτε από αληθινόν ζήλον είτε από ζηλοφθονίαν κινούμενοι, εξωπλίσθησαν κατά των μαθημάτων του νέου διδασκάλου…και ηναγκάσθη* (ο Βούλγαρης) *να ζητήσῃ αλλού την ησυχίαν του…Αφήκεν όμως εις τα Ιωάννινα πρόμαχον των νεωτέρων μαθημάτων τον φίλον και συσπουδαστήν του Τρύφωνα…*»[42].

Το 1756 ο Βούλγαρης ήταν στην Αθωνιάδα Σχολή, όταν έλαβε (το 1757 κατά τον Κούμα) από τα Ιωάννινα επιστολή του Τρύφωνα με αντίτυπο της *Μεθόδου*. Η οξύτητα της αντίδρασής του κλεινού αλλά φιλεριστικού Ευγενίου ήταν άμεση και σκληρή. Είχε έρθει η χρυσή ευκαιρία να ανταποδώσει με φαρμακερά βέλη την εκδίκησή του, επιστρατεύοντας όλη του την ρητορική δεινότητα και μαθηματική σχολαστικότητα. Έγραψε στον Τρύφωνα μακροσκελή απαντητική επιστολή όχι μόνο επισημαίνοντας τα λάθη της κατασκευής, αλλά και γεμίζοντάς την με βαρύτατες ύβρεις κατά του συγγραφέα της *Μεθόδου*. Τόσο δηκτική ήταν η λοιδορία, που σωστά την χαρακτηρίζει ο Κούμας ως «*νεανική φιλοτιμία σφοδροτέρα του δέοντος*» και ο Σάθας «*συζήτησιν εις βαναυσολογίας παρεκτραπείσα*»[43]. Σταχυολογούμε μερικές μόνο από τις ύβρεις, παρμένες από την ανατύπωση της επιστολής στην *Αντιπελάργηση*[44]: «*ου κότει μοι της Πυθαγόρου κλεινής βουθυσίης το έργον άξιον, τῃ δε του Αυγείου μάλλον βουστασίῃ κρίνεται άξιον*», «*παραλογισμός γε εστί σαφής ο εκδοθής, και των πάνυ αφελών, υφ' ου μόνος αν τις παρακρουσθείῃ αρτιμαθής ων τα τοιαύτα, ως ακμήν ανέφυσεν οδόντας, ή, των ους εδίδαξαν, ει τύχοι, αριστερά γράμματα μούσαι*», «*ό δη και οι παρακεκινημένοι τας φρένας πάσχουσιν», «του υπό τῳ λίθῳ εύδοντα σκορπίον ημίν δούναι τεκμηριώσαι*».

Δεν θα πρέπει να αποκλείσουμε το ενδεχόμενο (και θα δώσουμε επιχειρήματα που υποστηρίζουν αυτή την εκδοχή) ότι την επιστολή αυτή του Βούλγαρη προς τον Τρύφωνα, ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος *πιθανότατα δεν την είδε ποτέ!* Είναι γεγονός ότι ο Βούλγαρης έστειλε αντίγραφα της επιστολής σε πολλούς, «*αντίγραφα ποιήσας ικανά διέσπειρε πολλαχόσε*», όπως μας πληροφορεί ο

[41] Σώζονται πολύ λίγα βιογραφικά στοιχεία για τον Τρύφωνα εκ Μετσόβου. Κύριες πηγές μας ο Ζαβίρας, ενθ. ανωτ., και ο Π. Αραβαντινός, «*Βιογραφική Συλλογή Λογίων της Τουρκοκρατίας*» (επιμέλεια Κ.Θ. Δημαρά, Ιωάννινα 1960).

[42] Κ. Κούμα, «*Ιστορίαι των ανθρωπίνων πράξεων*» (Βιέννη 1832), τ. 12, σ. 560.

[43] Κούμας, ενθ. ανωτ., και αντίστοιχα Σάθας, ενθ. ανωτ. Όμοιες απόψεις π.χ. στον Παπαδόπουλο-Βρετό, ενθ. ανωτ., τ. Β, σ. 185, καθώς και στην βιβλιογραφία που δίνεται εκεί.

[44] Στις παραπομπές μας στην *Αντιπελάργηση* θα διατηρήσουμε τα τυπογραφικά σφάλματα, με τα οποία είναι γεμάτη, ώστε να πάρει ο αναγνώστης μία γεύση της δυσκολίας της ερμηνείας της. Π.χ. η αναφορά στο κυρίως κείμενο, που ακολουθεί έπρεπε να έγραφε «*ουχ ότι μοι της Πυθαγόρου κλεινής…*»

Κοσμάς πικρόχολα στην εισαγωγή της *Αντιπελάργησης*, πάντως πουθενά δεν σώζεται πληροφορία ότι ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος απάντησε στην επιστολή. Ιδού ωστόσο οι κύριοι λόγοι που μας κάνουν να πιστεύουμε ότι ενδεχομένως η επιστολή δεν έφτασε ποτέ στον συγγραφέα της *Μεθόδου*. Συγχρόνως θα φανούν και οι λόγοι της κατά τα άλλα ανεξήγητης εξηκονταετούς καθυστέρησης της έκδοσης της *Αντιπελάργησης*, που βγήκε οκτώ χρόνια μετά τον θάνατο και του υιού.

Ένα χρόνο πριν από το θάνατό του το 1806, ο βαθύγηρος τότε Ευγένιος Βούλγαρης, που ζούσε στη Ρωσία, έδωσε όλα του τα χειρόγραφα στους εθνικούς ευεργέτες αδελφούς Ζωσιμάδες με την άδεια να τυπωθούν[45]. Οι Ζωσιμάδες είχαν ήδη ευεργετήσει το έθνος πολλές φορές τυπώνοντας στην Βιέννη και διανέμοντας δωρεάν στους φιλομαθείς νέους αξιόλογα βιβλία, όπως διάφορα έργα από την περίφημη Ελληνική Βιβλιοθήκη του Κοραή, τα Μαθηματικά του Θεοτόκη, την Αριθμητική του Κοσμά Μπαλάνου κ.λ.π.[46]. Μέσω των Ζωσιμάδων τα χειρόγραφα του Βούλγαρη βρέθηκαν στην Βιέννη, όπου προξένησαν ιδιαίτερη αίσθηση στην ακμάζουσα εκεί ελληνική παροικία, και τυπώθηκαν με την φροντίδα και χρηματοδότησή τους. Έτσι το 1805 είδαν το φως της δημοσιότητας, μεταξύ άλλων, το *Περί συστήματος του παντός* και *Τα αρέσκοντα τοις φιλοσόφοις* του Βούλγαρη, καθώς και οι μεταφράσεις του των *Στοιχείων Μεταφυσικής του Γενουησίου* και *των Στοιχείων Γεωμετρίας του Τακουετίου* (δηλαδή το *Elementa Geometriae* του *Andreae Tacquet*, Καίμπριτζ 1710). Όλα τους συγκαταλέγονται στα πιο σημαντικά κείμενα της πνευματικής μας κληρονομιάς.

Μεταξύ των φύλλων του χειρογράφου της μετάφρασης των *Στοιχείων Γεωμετρίας του Τακουετίου*, υπήρχε και αντίτυπο της επιστολής του Βούλγαρη προς τον Τρύφωνα, με τους λιβέλλους και την αναίρεση της κατασκευής στην *Μέθοδο.* Οι Ζωσιμάδες θα την τύπωναν και αυτήν, αλλά βρέθηκε τότε στην Βιέννη ο Κούμας ο οποίος, όπως αναφέρει στην αυτοβιογραφία του, «*εσυμβούλευσεν εν Βιέννη τότε τον επιστάτην της εκδόσεως να μην την τυπώσῃ επειδή ο Ευγένιος δεν ήξευρε πλέον περί αυτής*». Το αποτέλεσμα ήταν ότι «*ο επιστάτης την έστειλε εις τον έτι ζώντα υιόν του Βαλάνου Κοσμάν*»[47].

Ο ανώνυμος επιστάτης που έστειλε την επιστολή του Βούλγαρη στον Κοσμά είναι πιθανότατα ο ευπατρίδης, κάτοικος τότε της Βιέννης, Σταύρος Ιωάννου[48]. Το

[45] Ο Κούμας, από όπου η πληροφορία αυτή, προσθέτει ότι 15 χρόνια νωρίτερα ο Βούλγαρης είχε αρνηθεί στον Ανδρέα Κωνσταντινίδη να τα τυπώσει, ως ανάξια, λέγοντας «*μη μου καταισχύνης το γήρας*». Τώρα όμως, συμπληρώνει ο Κούμας, γέρος και σχεδόν αναίσθητος, τα έδωσε όλα στους Ζωσιμάδες που διψούσαν για την τιμή.

[46] Πολλά έχουν γραφτεί για το εκδοτικό έργο και τις ευεργεσίες των Ζωσιμάδων. Κάνουμε ιδιαίτερη μνεία στο βιβλίο του Σ.Ν. Μπέττη, «*Οι Ζωσιμάδες και η συμβολή τους στην νεοελληνική αναγέννηση*» (Ιωάννινα 1990).

[47] Κούμας, *Ιστορίαι*, τ. 12, σ. 563.

[48] Στον Σταύρο Ιωάννου, εκτός των άλλων, το έθνος οφείλει την ίδρυση της πρώτης δημόσιας βιβλιοθήκης και καταλογογράφησης των βιβλίων κατά τα Δυτικά πρότυπα, όταν επέστρεψε το 1811 στην πατρίδα του τα Γιάννενα. Βλέπε π.χ. Μανουήλ Γεδεών «*Η πνευματική κίνησης του Γένους κατά τον ΙΗ΄ και ΙΘ΄ αιώνα*» (εκδοτική φροντίδα Α. Αγγέλου – Φ. Ηλιού, Αθήνα 1976) και τις εκεί παραπομπές στον *Λόγιο Ερμή* του 1813.

υποστηρίζουμε αυτό βασιζόμενοι σε μία επιστολή του Κούμα, της οποίας σώζεται αντίγραφο, γραμμένη το 1805 από την Βιέννη προς τον επίσκοπο Λαρίσης Ραφαήλ. Παραθέτουμε ολόκληρο το σχετικό χωρίο, γιατί είναι συγκινητικό: «…*αν αγαπᾷ η σεβασμία μοι πανιερότης αυτής, να κοσμήσῃ την αθλίαν μου πατρίδα, με τα συγγράμματα του γενναίου ήρωος, του κλεινού Ευγενίου. Zῃ δεσπότη μου, ο ανήρ, και ζώη επί μήκιστον δια την οφέλειαν του δυστυχούς ημών γένους. Ο γηραιός αυτού βραχίων εισέτι ενεργεί δια του σοφού αυτού καλάμου. Έχομεν με κάθε πόσταν συναλλαγήν γραμμάτων του σοφού ανδρός, ως αν οπού* ***τα συγγράμματά του διορθούνται χειρί εμῄ, κατά την του κυρ Σταύρου Ιωάννου επιστάτου εις τούτο κριθείσαν απόφασιν***»[49].

Από πρώτο λοιπόν χέρι οι πληροφορίες του Κούμα, ο οποίος στις *Ιστορίες* του συμπληρώνει ότι «*ο Κοσμάς ωργίσθη και έγραψεν «Αντιπελάργησιν» προς υπεράσπισην του πατρός. Την έστειλεν εις Βιένναν να τυπωθῄ*». Ήταν τότε ο Κοσμάς πολύ γέρος (πέθανε την ίδια χρονιά κατά τον Κούμα ή δύο χρόνια αργότερα, 77 ετών, κατά άλλη εκδοχή). Όμως η *Αντιπελάργησις* δεν τυπώθηκε τότε, αλλά «*δεν εξεύρω πώς*», λέει ο Κούμας, «*ετυπώθη 1816 εν Βιέννη, εκθέτουσα όλην την ιστορίαν της έριδος*»[50]. Είναι ενδιαφέρον ότι πολύ αργότερα, το 1861, βλέπουμε την *Αντιπελάργηση* στον κατάλογο των προς πώλησιν βιβλίων ενός τυπογραφείου στην Βενετία[51].

Συμπεραίνουμε ότι ο Κοσμάς, *με αφορμή την προ μισού αιώνα επιστολή του Βούλγαρη*, αντίτυπο της οποίας έλαβε από τους φίλους του στην Βιέννη το 1805, περισυνέλεξε τα κατάλοιπα του πατέρα του, όση αλληλογραφία του με τις Ακαδημίες και με τους λογίους βρήκε, την ίδια την *Μέθοδο*, πρόσθεσε σε αυτά τις μεθόδους λύσης των αρχαίων του Δηλίου προβλήματος και έγραψε στα γηρατειά του, την *Αντιπελάργηση* για υπεράσπιση του πατέρα του (εξ ου και ο τίτλος).

Το ότι ο Κοσμάς εξοργίστηκε από την προ μισού αιώνα επιστολή του Βούλγαρη, μας προτρέπει να εικάσουμε ότι, πιθανότατα, την έβλεπε για πρώτη

---

[49] Ιωάννου Οικονόμου Λαρισσαίου, «*Επιστολαί Διαφόρων 1759 -1824*» (επιμέλεια κ.λ.π. του χειρόγραφου κώδικα του 1824, από τους Γιάνη (sic) Α. Αντωνιάδη και Μ.Μ. Παπαϊωάννου, Αθήνα 1964), σελίς 128.

[50] Κούμας, *Ιστορίαι*, στην υποσημείωση της σελίδας 563. Παρεμπιπτόντως, τα ανωτέρω δίνουν απάντηση σε ένα μικρό σημείο μιας άλλης τελείως αλλιώτικης διαμάχης: όταν ο Σάθας δημοσίευσε το 1868 την *Νεοελληνική φιλολογία* του, ο Α. Δημητρακόπουλος απάντησε το 1871 με το «*Προσθήκαι και διορθώσεις εις την Νεοελληνικήν Φιλολογίαν του Κ. Σάθα*», (Λειψία 1871 και φωτοτυπική επανέκδοση το 1965 στην Αθήνα), όπου διορθώνει, συχνά ειρωνικά, ορισμένα σφάλματα του Σάθα. Στην σελίδα 90 γράφει «*λέγει ο Σάθας ότι σύγγραμμα Μπαλάνου του Βασιλόπουλου επιγραφόμενον* ***Αντιπελάργησις*** *εδημοσιεύθη εν Βιέννη τῳ 1816 υπό του υιού του Κοσμά…, άλλ' εν σελίδι 594 λέγει ότι ο Κοσμάς ετελεύτησεν εν έτει 1808*». Με τη σειρά του ο Σάθας απάντησε με ένα άρθρο στο ΚΛΕΙΩ το 1872 τιτλοφορούμενο *Επικρίσεως Έλεγχος*, όπου διορθώνει, όπου γίνεται, τον διορθωτή. Το προηγούμενο όμως σημείο δεν το θίγει. Αυτά που αναφέραμε στο κυρίως κείμενο είναι η απάντηση που θα μπορούσε να έδινε.

[51] «*Κατάλογος των βιβλίων των παρά τῳ ελληνικῷ τυπογραφείῳ του Αγίου Γεωργίου ευρισκομένων*» (Βενετία 1861). Ανατύπωση από τις εκδόσεις Ν. Καραβία, *Βιβλιοθήκη Ιστορικών Μελετών*, (αρ. 128, Αθήνα 1978).

φορά. Στο κάτω κάτω η επιστολή εντοπίζει το σφάλμα της κατασκευής και το γεγονός ότι ο Κοσμάς έγραψε ένα κείμενο προς ***υπεράσπισην*** του πατέρα του, όπως νόμιζε, σημαίνει ότι όλα αυτά τα χρόνια πίστευε πως η κατασκευή ήταν σωστή. Και εξακολούθησε να πιστεύει ότι ήταν σωστή, γιατί τώρα που έπνεε τα λοίσθια δεν είχε την ικανότητα να κατανοήσει το μαθηματικό μέρος της επιστολής. (Κατά μία εκδοχή, άλλωστε, ο ίδιος είχε προ πολλού πάψει να ενδιαφέρεται για τα Μαθηματικά, που έφτασε στην ακρότητα να τα καταργήσει το 1797 ως μάθημα στην κάποτε ιδιαίτερα ένδοξη σχολή του[52]). Αντίθετα, αν είχε δει την επιστολή του Βούλγαρη το 1757, όταν ήταν 26 ετών και συνεργάτης του πατέρα του στη σχολή, θα ήταν σε θέση να καταλάβει τις επικρίσεις. Στη χειρότερη περίπτωση, αν νόμιζε ότι οι επικρίσεις δεν ευσταθούσαν, θα απαντούσε *τότε* υπερασπιζόμενος τον άρρωστο και γέρο πατέρα του. Πιθανόν λοιπόν, όχι μόνο ο γιος αλλά και ο ίδιος ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος να μην είδε την προς Τρύφωνα επιστολή, γιατί τα πράγματα θα είχαν, εικάζουμε, διαφορετική τροπή. (Η μόνη άλλη εκδοχή, πιθανή και αυτή, είναι να μην απάντησε ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος από απαξίωση).

Η οργή του Κοσμά είναι έκδηλη στην εισαγωγή του της Αντιπελάργησης, όπου χρησιμοποιεί ύβρεις εφάμιλλες αυτών του Ευγενίου για τον οποίο λέει ότι είναι «*φιλοσκώμμων και φιλολοίδορος*». Δεν τήρησε αυτά που προσάπτει στον Ευγένιο ότι «*το σκώπτειν και χλευάζειν και διασύρειν ουκ έστι φιλοσοφούντων ανδρών, αλλ' εξεστηκότων και μαινομένων, και ουδ' όλως ανδρών*». Η τελευταία παράγραφος της εισαγωγής είναι η πιο δηκτική από όλες, με κατάρα εις βάρος του Ευγενίου στον άλλο κόσμο που είχε εν τῳ μεταξύ αποδημήσει, «*εχρήν τῳ πυρί παραδίδοσθαι, η εν παραβύστῳ που κείσθει, ίνα μη επί πολύ η δυσοσμία εκτανθείσα, και εκ των υπερβορέων, αηδίαν τοις Έλλησι τοις τε νυν και τοις εις έπειτα γενησομένοις προμνηστεύσηται*».

Αυτά όσον αφορά το φιλολογικό μέρος της επιστολής του Βούλγαρη. Στο μαθηματικό μέρος τα πράγματα είναι μέσα στα επιστημονικά πλαίσια. Έχει όμως η επίκρισις μία ιδιομορφία: πλατειάζει σε απίστευτο βαθμό. Εκεί που η κατασκευή μαζί με την απόδειξη είναι τέσσερις σελίδες κειμένου και η επίκριση του Θεοτόκη ούτε δύο, ο Βούλγαρης χρειάζεται δεκαοκτώ για να πει τα ίδια πράγματα. Ο Κοσμάς τον ψέγει ως περιττολόγο, απεραντολόγο, βαττολόγο και ερεσχολόγο. Αντιλαλούν εδώ και οι διαμαρτυρίες του Μοισιόδακα που, πρώην μαθητής του Βούλγαρη στην Αθωνιάδα, γράφει «*όταν εμείς εδιδασκόμεθα εν τῃ Αθωνίτιδι σχολῄ, όπου εγυμνασιάρχει πανευκλεώς ο κλεινός Ευγένιος, εν όλῃ, μια, διετία, επικρατούσης της οποίας κατερίψαμεν μόχθους ανεκδιήγητους,…τίνα καρπόν*

[52] Φ. Μιχαλόπουλος, «*Τα Γιάννενα και η Νεοελληνική επανάσταση 1648 – 1820*», (Αθήνα 1930), σ. 72 (όμως αμφισβητούμε την περί κατάργησής των άποψή του). Προσθέτουμε ότι από το 1797, η σχολή παρήκμαζε, γιατί έχασε την συνδρομή από το κληροδότημα στην Βενετία του ιδρυτή της Γκιούμα (εκείνη την χρονιά ο Ναπολέων κατέλαβε την Βενετία και δήμευσε το Νομισματοκοπείο της). Ευτυχώς που συνέδραμαν οικονομικά οι αδελφοί Ζωσιμάδες, μετά από τις δραστήριες επικλήσεις του πρώην δασκάλου τους Κοσμά Μπαλάνου, για να μην κλείσει τελείως η σχολή. Επίσης, το 1798, οι Ζωσιμάδες τύπωσαν με δαπάνες τους την Αριθμητική του Κοσμά. Από το 1799 έπαψε να σχολαρχεί ο Κοσμάς, γέρος πια, και την σχολή ανέλαβε ο αδελφός του Κωνσταντίνος.

εδρέψαμεν το τελευταίον από των ατρύτων μόχθων ημών; … ,μίαν έννοιαν συγκεχυμένην ή επιπόλαιον της Αριθμητικής, και τέλος την γνώσην ενός μόνο βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδου, και μήτε τούτου πλήρους (…και ο λόγος είναι ο επιφερόμενος. Ο ανήρ παρέδιδε την ογδόην πρότασιν, φέρε ειπείν, πρώτον κατά τον Ευκλείδην, είτα κατά τον Πρόκλον, είτα κατά τον Κλαύδιον, είτα κατά τον Τακουέτιον, είτα καθ' εαυτόν, πλήν οσάκις καθ' εαυτόν, αεί πολυτρόπως, ή ως επί το πλείστον αεί πολυτρόπως… Καλόν ότι δεν σώζονται αι Γεωμετρίαι του Αναξαγόρου, του Οινοπίδου, του Ιπποκράτους, του Δημοκρίτου, του Αρχύτου, του Ευτοκίου,…, αλλεοτρόπως πάσα πρότασις απλώς έμελλε να μετεωρισθῃ τυχόν άχρι και του εκατοστού αυτού)»[53].

Ήδη αναφέραμε ότι ο Βούλγαρης εντόπισε την ουδετερότητα του σημείου ο στην απόδειξη και την επέκρινε δριμύτατα. Αλλά και στην ίδια την απόδειξη με την εις άτοπον απαγωγή, αντιλήφθηκε πού ήταν το σφάλμα (υπενθυμίζουμε ότι έγκειται στον εκφυλισμό κάποιου τριγώνου). Πραγματικά αν και εμείς σήμερα βλέπουμε την απάντηση του Βούλγαρη όχι στην αρχική κατασκευή αλλά σε μία «βελτιωμένη» παραλλαγή της, της οποίας δεν έχουμε ούτε το σχήμα μπροστά μας (αλλά κάναμε ανασύστασή της στα παραπάνω), δεν υπάρχει αμφιβολία για του λόγου το αληθές. Το ομολογούν εκφράσεις από την προς Τρύφωνα επιστολήν του όπως «*τηνικαύτα γαρ η ρ3, τῃ ρο συμπίπτουσα υποσυνάπτειν ού δίδωσι την ατοπίαν, εξ ης η του προβλήματος λύσις όλη εξήρτηται…ού γαρ αν επαχθείη το άτοπον του την εκτός γωνίαν ίσην τῃ εντός και απενάντιον, αφ' ῳ* ***η δείξις κρηπίζεται μηδενός συνισταμένου τριγώνου****, ουδέν δ' αν συσταίη συμπτούσης της ρ3 τῃ ρο, δύω γαρ ευθείαι* ***χωρίον ου περιέχουσι***».

Οι διαφωνίες λοιπόν του Βούλγαρη ήταν έγκυρες.

<u>Νικηφόρος Θεοτόκης</u>. Μας σώζεται επιστολή του Νικηφόρου Θεοτόκη γραμμένη λίγο μετά την έκδοση της *Μεθόδου* το 1756, που ανατυπώνεται στην *Αντιπελάργηση*, με σχολιασμό και επίκριση της προτεινόμενης λύσης του Δηλίου προβλήματος. Τα λιτά λόγια του εικοσιπεντάχρονου Θεοτόκη είναι επί της ουσίας και από μαθηματική σκοπιά είναι υπόδειγμα διαύγειας. Πόσο εύστοχα φαίνονται τα λόγια του Κούμα που, για άλλη περίσταση, συγκρίνει τον Ευγένιο με τον Νικηφόρο Θεοτόκη με την φράση «*εις τας Μαθηματικάς επιστήμας* (ο Θεοτόκης) *υπερέβαινε πολύ τον Ευγένιο*»[54].

---

[53] Ι. Μοισιόδαξ, *Απολογία*.

[54] *Ιστορίαι.* Προσθέτουμε ότι οι περισσότεροι βιογράφοι των δύο κλεινών αυτών Κερκυραίων λογίων, του Βούλγαρη και του Θεοτόκη, δεν παραλείπουν να κάνουν την μεταξύ τους σύγκριση, γιατί ο βίος τους έχει πάμπολλες ομοιότητες. Βλέπε π.χ. Α.Ν. Γούδα, «Βίοι παράλληλοι» (Αθήνα 1870). Όλοι συμφωνούν ότι λίγο πολύ, ο Βούλγαρης «*επετηδεύετο του λόγου την γλαφυρότητα, επιδεικνύμενος τον πλούτον της παντοδαπής πολυμαθείας, δι' ό και πολλά των συγγραμμάτων του εισί στρυφνά και δυσνόητα. Ο δε Νκηφόρος και λέγων και γράφων έτεινε πάντοτε και υπέρ παν άλλο*

Ο μετέπειτα συγγραφέας των περίφημων «*Στοιχείων Φυσικής*» (Λειψία 1766/7) και των «*Στοιχείων Μαθηματικών*» (Μόσχα 1798/9), βιβλίων σταθμών στην ελληνική βιβλιογραφία, ήταν στην Ιταλία όταν ενέσκηψε η συζήτηση για την κατασκευή[55]. Τώρα βρισκόταν πίσω στην πατρίδα του την Κέρκυρα, όταν έλαβε επιστολή του Μπαλάνου Βασιλόπουλου (δεν σώζεται) με την *Μέθοδο* και την «βελτιωμένη» εκδοχή της. Επίσης, από τα συμφραζόμενα της επιστολής του Θεοτόκη βγαίνει το συμπέρασμα ότι η επιστολή του Μπαλάνου Βασιλόπουλου ήταν απάντηση σε προηγούμενη επιστολή του ίδιου (δεν σώζεται) με επικρίσεις (εννοείται πριν από την έκδοση της *Μεθόδου)* στην κατασκευή.

Η απάντηση του Θεοτόκη έχει τρία σκέλη. Πρώτα υπερασπίζεται τα σύγχρονα μαθηματικά, ιδίως τις αλγεβρικές μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας, επικρίνοντας τον λύτη για τις επιφυλάξεις του σ' αυτά[56]. Γράφει: «…*ο εδικός μου νους επείσθη πολλαίς φοραίς από την ανάλυσιν, πως ένα τέτοιον πρόβλημα να λυθῄ με έναν τέτοιον τρόπον είναι αδύνατον…πως όλοι όσοι σπουδάζουν και καταγίνονται εις την ανάλυσιν, λύουν αναλυτικώς, όσα συνθετικώς δηλ. γεωμετρικώς προβάλλονται και ευκολώτερα, και συντομώτερα. Και δεν είναι πρόβλημα εις την Γεωμετρίαν το οποίον αναλυτικώς να μην διαλύεται…*». Δεν κάνει όμως το λάθος να μείνει δογματικός, όπως πολλοί προηγούμενοι, αλλά εξετάζει την γεωμετρία της κατασκευής.

Όπως και στην περίπτωση του Βούλγαρη, ο Θεοτόκης απαντά στην «βελτιωμένη» εκδοχή (που δεν την γνωρίζουμε αλλά την εικάζουμε), και της οποίας εντοπίζει το μαθηματικό κενό. Επισημαίνει ενδεικτικά ότι «…*κατασκευάζει βέβαια* (ο λύτης) *το τρίγωνον, αλλά το άτοπον δεν συμπεραίνεται επειδή επάνω εις ταις β3, β4 ταις ίσαις* ***δεν συνίστανται παντελώς τρίγωνα****…*».

Η καλοσύνη του Θεοτόκη τον ωθεί να εξετάσει άλλη μία εκδοχή. Βλέπει ότι το υπό συζήτηση τρίγωνο εκφυλίζεται, οπότε καταστρέφεται η απόδειξη, γι' αυτό κάνει τον συνήγορο του διαβόλου. Ελέγχει μήπως έκανε λάθος εκ παραδρομής στην επιστολή του ο λύτης. Λέει ο Θεοτόκης «*εστοχάσθηκα μήπως και είναι το σφάλμα εις την επιστολήν του* (που είχε την βελτιωμένη κατασκευή) *και αντίς να ειπῄ ειλήφθω η φ3 ίση τῃ ο4, είπεν ειλήφθω η 23 ίση τῃ ο4…*»[57]. Η κατάσταση δεν

το εύληπτον και ακριβές…δια το διαυγές της φράσεως και το έντονον του συλλογισμού…» (Γούδα, ενθ. αναφ., τ. Β, σ. 78).

[55] Παραπέμπουμε στην διδακτορική διατριβή της Ζ. Μουρούτη – Γκενάκου «*Ο Νικηφόρος Θεοτόκης και η συμβολή αυτού εις την παιδείαν του Γένους*» (Πανεπιστήμιο Αθηνών 1974, Επανέκδοση, Αθήνα 1979) για μελέτη των βιογραφικών και του έργου του Θεοτόκη. Επίσης για εμπεριστατωμένη μελέτη της *Φυσικής* του υπάρχει η διδακτορική διατριβή του Γ.Ν. Βλαχάκη, «*Η "Φυσική" του Νικηφόρου Θεοτόκη. Σταθμός στην επιστημονική σκέψη τον 18^ο^ αιώνα*» (Εθν. Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 1990). Βλέπε επίσης Μ. Λάμπρου «*Τα μη στοιχειώδη μαθηματικά κατά την εποχή της Τουρκοκρατίας (η περίπτωση του Νικηφόρου Θεοτόκη)*» (άρθρο στο «*Οι Μαθηματικές Επιστήμες στην Τουρκοκρατία*», Πρακτικά Ημερίδας, Εθν. Ίδρυμα Ερευνών, 1990).

[56] Ο Α. Πούλος, *Διαπάλη*…(βλέπε υποσ. 25 παραπάνω), ασχολείται εκτενώς με την σύγκρουση του αναλυτικού και συνθετικού πνεύματος στην διαμάχη της *Αντιπελάργησης*.

[57] Διατηρήσαμε τον συμβολισμό του που αναφέρεται στο ανύπαρκτο για εμάς γεωμετρικό σχήμα, γιατί δεν έχει εδώ σημασία το επιχείρημά του. Θα μπορούσαμε εξ ίσου καλά να τον μετατρέπαμε

αναιρεί όμως το σφάλμα (απλώς το μεταφέρει αλλού), γιατί μετά από σωστή επιχειρηματολογία ο Θεοτόκης καταλήγει «*…και πάλιν εγκρεμνίσθη το τρίγωνον, οπού εκατασκεύασε και πίπτωντας το τρίγωνον δεν συμπεραίνει άτοπον…*».

Τέλος ο Θεοτόκης ελέγχει την αυθαίρετη επιλογή του σημείου ο, λακωνικά. Λέει «*με αυτήν την κατά πτώσιν κατασκευήν απομένει πάντοτε το ευρεθέν αόριστον. Δια το να μην είναι λόγος οπού μας βιάζῃ* (δηλαδή εξαναγκάζει) *να λάβωμεν εκείνην την γραμμήν, φερ' ειπείν την ευρεθείσαν βο, ή να λάβωμεν άλλην προς αρέσκειαν, φερ' ειπείν την βξ, ή βδ…*».

Συμπεραίνουμε ότι και ο Θεοτόκης, όπως ο Βούλγαρης, επεσήμανε σωστά τα κενά της προτεινόμενης λύσης. Η καταγραφή όμως των αντιρρήσεων από τον πρώτο εκ των δύο είναι θαυμάσια, και υπερέχει σαφώς του πρεσβυτέρου του.

Η φιλόσοφος. Στην επιστολή του προς τον δάσκαλό του το 1754 από την Βενετία ο Ζαρζούλης, αφού έδειξε την κατασκευή σε διαφόρους που έφεραν αντιρρήσεις, γράφει: «*…την έδειξα* (την κατασκευή) *εν Βονωνία και τῃ φιλοσόφῳ, μήπως αυτή γένηται μεθ' ημών, ήτις επαίνησε την μέθοδον, όμως μου απεκρίθη, ότι έχει να την σκεφθῄ ακριβώς. Της είχα δώσῃ εν χειρόγραφόν σας Ελληνικόν απ' εκείνα οπού μας επέμψατε, και το ανέγνωσε θαυμασίως διατί είχε σπουδάξῃ και την Ελληνικήν διάλεκτον και αναγινώσκει, και γινώσκει και αυτόν τον Δημοσθένην. Τοιαύτης αγχινοίας η γυνή, μου είπεν, ότι θέλει μου αποκριθῄ την γνώμη της μετά την εις τα εκείσε επάνοδόν μου…*»

Δεν έχουμε καμία άλλη πληροφορία επί του θέματος.

Ποια είναι όμως η μη κατονομαζομένη αυτή αγχίνους, ελληνομαθής, μαθηματικός και φιλόσοφος στην Bologna των μέσων του 18^{ου} αιώνα που ο Ζαρζούλης θεωρεί τόσο γνωστή που έκρινε περιττό να γράψει το όνομά της;

Την εποχή εκείνη υπήρχε, παγκοσμίως, μόνο μία διάσημη γυναίκα μαθηματικός και ήταν στην Bologna. Ήταν η Agnesi, που είχε μάθει Ελληνικά από μικρή, ήταν αγχίνους ως πρότερο παιδί θαύμα, ήταν άριστη μαθηματικός, ήταν φιλόσοφος και συγγραφέας του *Propositiones philosophicae* από τα είκοσί της, και τέλος δίδασκε στο Πανεπιστήμιο που φοιτούσε ο Ζαρζούλης, ο Τρύφων και ο Θεοτόκης. Δεν πρέπει να αμφιβάλλουμε ότι η ταύτιση της ανώνυμης γυναίκας που αναφέρει ο Ζαρζούλης με την Agnesi είναι, όπως αναφέραμε σε προηγούμενη ενότητα, η σωστή[58].

ώστε να είναι συμβατό με το δικό μας σχήμα. Παρεμπιπτόντως, το γεγονός ότι ο Θεοτόκης γράφει πως πιθανόν να υπάρχει και άλλη εκδοχή, που *εκ παραδρομής* δεν γράφτηκε σωστά στην επιστολή, είναι άλλη μία ένδειξη ότι έλαβε από τον λύτη *παραλλαγή* της αρχικής κατασκευής.

[58] Βλέπε υποσημειώσεις 25 και 26 παραπάνω για παραπομπή στο άρθρο του Α. Πούλου, που πρώτος ταύτισε **την** φιλόσοφο, καθώς και για λίγα βιογραφικά της Agnesi.

Είναι η «*Μαρία Αγνησία η μεγάλη της Ιταλίας φιλόσοφος*», όπως την ονομάζει σε άλλη περίσταση ο Κούμας, στα ιστορικά του σχόλια στην εισαγωγή του της «*Σειράς Στοιχειώδους των Μαθηματικών και Φυσικών Πραγματειών*» (Βιέννη 1807).

Δεν ξέρουμε τι απάντησε τελικά, αν απάντησε, η φιλόσοφος στον Ζαρζούλη. Η Agnesi πάντως είναι γνωστό ότι ήδη δύο χρόνια νωρίτερα, από το 1752 με τον θάνατο του πατέρα της, έπαψε να ασχολείται με τα Μαθηματικά για να αφιερωθεί σε αγαθοεργίες και στην φροντίδα των είκοσι μικρότερων αδελφών της. Το πιθανότερο λοιπόν είναι να μην απάντησε.

Matheseos Professoris. Θα αποκόμιζε κανείς την εντύπωση από τα παραπάνω ατυχή περιστατικά πως ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος δεν ήξερε Μαθηματικά. Πολλοί παλαιότεροι αλλά και σύγχρονοι μελετητές εξ άλλου, όποτε αναφέρονται στον ίδιο ή στον γιο του Κοσμά, προσθέτουν μία σειρά επιχειρημάτων για την «*άγαν συντηρητικήν μονομέρειά τους*» και άλλα παρόμοια. Δεν θα ασχοληθούμε καθόλου με αυτό το δεύτερο θέμα, για το οποίο έχουν γραφεί πολλά, αλλά θα εστιάσουμε την προσοχή μας μόνο στα μαθηματικά τους.

Είναι αναμφισβήτητο το γεγονός ότι ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος δίδαξε Μαθηματικά, σε σχολικό επίπεδο, σε πολλούς οι οποίοι αργότερα έγιναν δόκιμοι μαθηματικοί μετά από σπουδές σε Πανεπιστήμια του εξωτερικού. Η φράση του Μοισιόδακα στην *Απολογία* του συνοψίζει με γλαφυρό τρόπο την οφειλή του Γένους στον Διδάσκαλο: «*Ο αοίδιμος Μπαλάνος Βασιλόπουλος, ανήρ εν πολλοίς άλλοις δοκιμώτατος, και* ***εν τοις Μαθηματικοίς είτα αριστεύων****, ζήλῳ ανενδότῳ κινούμενος υπερ των μαθητευόντων αυτῷ και υπερ παντός του Γένους απλώς, ανεζώσθη να καταστρώσῃ μίαν οδόν συνθετικήν πλήρη* (δηλαδή ένα βιβλίο κλασικών μαθηματικών)».

Άλλωστε ο Ζαβίρας στο «*Νέα Ελλάς*» αναφέρεται συχνά στον Μπαλάνο ως μαθηματικό, «*μαθηματικός άριστος ως ουδείς των καθ' ημάς εν τοις χρόνοις εκείνοις*», ή ως διδάσκαλο των Μαθηματικών, όταν βιογραφεί διαφόρους άλλους λογίους. Π.χ. γράφει: «*Δημήτριος Ραζής… ηκροάσατο τα εγκύκλια μαθήματα εν τῃ Πίσῃ της Ιταλίας, τα δε μαθηματικά εις το Μπαλάνου*» (αργότερα ο Ραζής μετάφρασε στα Ελληνικά τη Γεωμετρία του Καμετίου[59]), «*Θεόφιλος Καμπανίας επίσκοπος…εχρημάτισε μαθητής του περιφήμου Ευγενίου του Βουλγάρεως και του μαθηματικού Μπαλάνου…*», «*Κοσμάς ιερεύς…υιός του Μαθηματικού Μπαλάνου…*», «*Σεβαστός Λεοντιάδης…εχρημάτισε μαθητής Μεθοδίου του Ανθρακίτου και συμμαθητής του Μαθηματικού Μπαλάνου…*» κ.λ.π. Όλα δε αυτά μια εποχή όπου, όπως δεινολογεί ο Μοισιόδακας στην Απολογία του , «*που οι*

[59] Οκταβιανού Καμετίου (Octavianus Cametius), «*Γεωμετρία, νέα τάξει τε και μεθόδῳ…*» (Βενετία 1787). Προσθέτουμε ότι στην εισαγωγή της Ελληνικής έκδοσης υπάρχει και μία σύντομη Ιστορία των Μαθηματικών παρμένη από τον Μπαλάνο Βασιλόπουλο (γραμμένη ως εισαγωγή στην έκδοση του τελευταίου της *Οδού Μαθηματικής* του Ανθρακίτη).

μαθηματικοί, αν εξαιρεθῄ ο αοίδιμος Μπαλάνος;», ενώ ο Οικονόμου τον αποκαλεί «Ευκλείδη του 18^{ου} αιώνα» [60].

Προσθέτουμε ότι και ο ίδιος ο Μπαλάνος Βασιλόπουλος (ή οι μαθητές του) θεωρεί τον εαυτό του ως φιλόσοφο και μαθηματικό: Στο Λατινικό τμήμα της προμετωπίδας της έκδοσής του της *Μεθόδου* το 1756, ο Ιωαννίτης συγγραφέας αναφέρεται ως BALANI BASILOPULI ARCHIPRESBYTERI JOANNITARUM, PHILOSOPHIAE ET MATHESEOS PROFESSORIS.

Δεν πρέπει λοιπόν να αμφισβητήσουμε τις μαθηματικές γνώσεις του λύτη μας. Ούτε όμως πρέπει να φτάσουμε στο άλλο άκρο της υπερβολής: Τα μαθηματικά που χρησιμοποιούνται στην απόπειρά του λύσης του Δηλίου προβλήματος, περιέχονται στα έξι μόνο πρώτα βιβλία των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Ασφαλώς θα ήταν καλός γνώστης και των υπολοίπων, και όσων περιέχονται στην *Οδό Μαθηματικής* που επιμελήθηκε. Αυτά όμως δεν ξεφεύγουν από τα γνωστά, λίγο – πολύ, στους αρχαίους μαθηματικά, και παραβλέπουν τις ραγδαίες εξελίξεις της εποχής του. Η ετυμηγορία του Κούμα το 1832 είναι, πιστεύουμε, η οξυδερκέστερη «*διότι ο Βαλάνος έμπειρος πολύ της στοιχειώδους Γεωμετρίας ων, αλλ' **αγνοών τα της υψηλοτέρας Μαθηματικής** ενόμισεν ότι έλυσεν το περίφημον πρόβλημα…*»[61]. Ανάλογη είναι η γνώμη του Μοισιόδακα το 1780 που λέει (με αφορμή άλλη αιτία) «*…η περιττή υπόληψις την οποίαν είχε προς την αρχαιότητα και αυτός ο ανήρ* (δηλαδή ο Μπαλάνος)*, και η άγνοια των διαλέκτων της Ευρώπης, εχρημάτισαν δύω αιτίαι, αίτινες εποίησαν αυτόν να διαλάβῃ περί μόνης της συνθετικής οδού εν δυσί τόμοις ογκωδεστάτοις, ενώ πολλοί των νεωτέρων είτα διαλαμβάνουσιν…εν μόνῳ εν ενί τόμῳ…*»[62].

<u>Συμπεράσματα</u>. Υπό το πρίσμα της άγνοιας του λύτη των τότε σύγχρονων μαθηματικών εξηγείται η παρερμηνεία εκ μέρους του των απόψεων του Euler, που αναμφίβολα χρησιμοποίησε εργαλεία της *Αναλυτικής Γεωμετρίας* εκεί που ο λύτης γνώριζε μόνο την *Συνθετική Γεωμετρία*. Επειδή παράλληλα άκουγε επιχειρήματα, όπως του Riccati, που δεν ήταν αδιαφιλονίκητα όπως απαιτεί η μαθηματική ακριβολογία, οξυνόταν η δυσπιστία του λύτη εναντίον όσων ισχυρίζονταν ότι τα τότε σύγχρονα μαθηματικά ήταν η πανάκεια για την αντιμετώπιση του Δηλίου προβλήματος. Η μυστικότητα, για τον φόβο σφετερισμού, που τον έκανε να γνωστοποιήσει την μέθοδό του μόνο σε ένα κλειστό κύκλο φίλων, συνέτεινε στο να μην διασαφηνισθεί το θέμα. Οι Ακαδημίες, αντί να βοηθήσουν, υπήρξαν αιτία, για εσωτερικούς τους λόγους, επιπρόσθετης καθυστέρησης. Πολύ πιθανόν η επιστολή του Βούλγαρη προς τον Τρύφωνα (και ίσως προς άλλους επίσης) να μην κοινοποιήθηκε ποτέ στον Μπαλάνο Βασιλόπουλο, αλλά και αν κοινοποιήθηκε, η

[60] Πηγή μας τα έργο του Φ. Μιχαλόπουλου, «*Τα Γιάννενα και η Νεοελληνική επανάσταση 1648 – 1820*» (Αθήνα 1930), όπου αντλεί από τον Α. Οικονόμου, «*Απολογία ιστορικοκριτική*» (Τριέστη 1814).
[61] Κούμας, *Ιστορίαι,* σελίς 562.
[62] Ιωσήπου του Μοισιόδακος, Απολογία, σελίς 41 στην επανέκδοση του Α. Αγγέλου (Αθήνα 1976).

προσωπική έριδα με τον κλεινό αλλά φιλόνικο Ευγένιο επέτεινε την διαμάχη, ώστε να μην βλέπει με νηφαλιότητα ο λύτης τα επιχειρήματα που ανατρέπουν την κατασκευή του. Τέλος, ο σεβασμός των μαθητών του προς τον γέρο και βαριά άρρωστο δάσκαλό τους, οι οποίοι πιστεύουμε ότι έβλεπαν κενά στην προτεινόμενη λύση αλλά προσπαθούσαν να του τα ανακοινώσουν με ήπιο τρόπο και συγχρόνως να τον ενθαρρύνουν να βελτιώσει την μέθοδο, συνέβαλε άλλη μια φορά στο να διαιωνισθεί η διαμάχη.

Έτσι μας έμεινε κληρονομιά από τα μαθηματικά της απηνούς προεπαναστατικής εποχής ένα συναρπαστικό και συνάμε πικρόχολο κείμενο, η περίφημη ***Αντιπελάργησις***. Γράφτηκε εις τας δυσμάς του βίου του από έναν εβδομηνταπεντάχρονο υιό εναντίον ενός θρυλικού ενενηντάχρονου πρεσβύτη, προς απονομήν δικαίου σε μία προ μισού αιώνα μαθηματική διαμάχη του παρήλικου τότε πατέρα του.

«*Και ει μεν η παρεκτροπή εκ του κοσμίου και καλώς έχοντος εν τούτοις σεβασμίοις διδασκάλοις λυπεί, παρηγορεί τουλάχιστον η ένδειξις επιστημονικής ζωής εν Ελλάδι υπό βαρύτατον δούλειον ήμαρ*» [63].

[63] Τα λόγια είναι του εύγλωττου και πολυμαθούς πανεπιστημιακού δασκάλου Ασωπίου, ανθ. Ανωτ. το 1856, όπου προσθέτει πικρά ότι την εποχή του η ένδειξις επιστημονικής ζωής «*δεν φαίνεται εν Ελλάδι ελευθέρα, μετά ολόκληρον σχεδόν εξ εκείνης της εποχής εκατονταετηρίδα*». Σήμερα, άλλη μία και μισή εκατονταετία αργότερα και τόσο μακριά από την εποχή της Τουρκοκρατίας, είναι άραγε χιμαιρώδης η προσδοκία να μην συσκοτίζεται η **κρίσις** των καθηγετών του τόπου με προσωπικές εμπάθειες, όπως μεταξύ των τότε **επίκουρων** των μαθηματικών; Ας αναπληρωθούν τα ολισθήματα του παρελθόντος με **εξέλιξη** στα σημεία των καιρών.